

حلول امتحان البجروت 372

شتاء 2025، الموعد أ

3 وحدات . الصف الثاني عشر . النموذج العربي الرسمي

حلّ أسئلة الامتحان بخطوات مفصلة بطرق كراسة التحضير لامتحان البجروت - النموذج 372 ولغتها: المعطيات، القانون، التعويض، الحساب سطرًا بعد سطر، والجواب النهائي مع الوحدة.

نُجيب عن أربعة من الأسئلة الستة، عن سؤال واحد على الأقل من كلّ فصل؛ لكلّ سؤال 27 درجة، والمجموع 100 درجة على الأكثر. تُفحص الإجابات الأربع الأولى فقط.

في آخر الملف: جدول الإجابات النهائية.

حقوق النشر والطباعة | mathbagrut.com

© 2026 mathbagrut.com — حقوق الشرح والحلول والتصميم محفوظة. يُسمح بالطباعة للتعلم الشخصي أو الصفّي مع إبقاء اسم الموقع. إعادة النشر أو البيع تحتاج إذنًا خطّيًا.

نصوص الأسئلة من النموذج العربي الرسمي لامتحان وزارة التربية والتعليم؛ حقوق نصوص الأسئلة والرسوم الأصلية للوزارة. الحلول والشروح والرسوم التوضيحية تعليمية وليست حلًا رسميًا.

السؤال 1 . صناعة الكنبات والكراسي

التخطيط الخطّي — في الكراسة: كراسة 372 . الفصل 2 . تمهيد 2 - 10 ، 12

1. في مصنع لإنتاج الأثاث يصنعون نوعين من الأثاث: كنبات وكراسي .
في عملية الإنتاج توجد مرحلتان : مرحلة قصّ الخشب ومرحلة التنجيد .
في دورة إنتاج واحدة، يمكن تشغيل آلة القصّ لمدة 32 ساعة على الأكثر،
وآلة التنجيد لمدة 36 ساعة على الأكثر .
الجدول الذي أمامكم يعرض عدد الساعات اللازمة لإنتاج كلّ واحد من نوعي الأثاث .

مدة تشغيل آلة القصّ (بالساعات)	مدة تشغيل آلة التنجيد (بالساعات)	
4	2	كنبة
2	6	كرسي

- نرمز بـ x إلى عدد الكنبات وبـ y إلى عدد الكراسي، التي يُنتجونها في المصنع في دورة إنتاج واحدة .
أ . اكتبوا هيئة اضطرابات المسألة .
ب . ارسموا المجال الممكن الناتج من هيئة الاضطرابات .
ربح المصنع من كلّ كنبه هو 400 شيكل، ومن كلّ كرسي 700 شيكل .
جـ . (1) اكتبوا دالة الهدف .
(2) كم كنبه وكم كرسيًا يجب على المصنع أن يُنتج في دورة إنتاج واحدة كي يجني أكبر ربح ممكن؟
في إحدى دورات الإنتاج، أنتجوا في المصنع كراسي فقط . في هذه الدورة، أنتجوا أقصى عدد ممكن من الكراسي .
د . كم كرسيًا أنتج المصنع في دورة الإنتاج هذه؟

البند أ

- في مصنع لإنتاج الأثاث يصنعون نوعين من الأثاث: كنبات وكراسي .
في عملية الإنتاج توجد مرحلتان: مرحلة قصّ الخشب ومرحلة التنجيد .
في دورة إنتاج واحدة، يمكن تشغيل آلة القصّ لمدة 32 ساعة على الأكثر، وآلة التنجيد لمدة 36 ساعة على الأكثر .
الجدول الذي أمامكم يعرض عدد الساعات اللازمة لإنتاج كلّ واحد من نوعي الأثاث .
نرمز بـ x إلى عدد الكنبات وبـ y إلى عدد الكراسي، التي يُنتجونها في المصنع في دورة إنتاج واحدة .
اكتبوا هيئة اضطرابات المسألة .

1 . جدول المعطيات

الأثاث	العدد	القَصّ (ساعة)	التنْجيد (ساعة)
كَنَبَات	x	$4x$	$2x$
كراسي	y	$2y$	$6y$
المجموع والحدّ		$4x + 2y \leq 32$	$2x + 6y \leq 36$

2 . هيئة الاضطرابات

«على الأكثر» تعني $\leq$ ، والأعداد غير سالبة.

$$4x + 2y \leq 32$$

$$2x + 6y \leq 36$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

في القصّة عدد القطع صحيح.

3 . فحص

نقطة الأصل تحقّق الحدين $0 \leq 32$ و $0 \leq 36$ ✓

الجواب النهائي

$4x + 2y \leq 32$ ، $2x + 6y \leq 36$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، أعداد القطع صحيحة.

البند ب

ارسموا المجال الممكن الناتج من هيئة الاضطرابات.

1 . التقاطعات مع المحورين

مع محور y	مع محور x	المستقيم
$(0, 16)$	$(8, 0)$	$4x + 2y = 32$
$(0, 6)$	$(18, 0)$	$2x + 6y = 36$

نقطة الأصل تحقّق الاضطرابين؛ نأخذ جهتها في الربع الأوّل. على المحورين نأخذ الأصغر: $(8, 0)$ و $(0, 6)$.

2. التقاطع بالتعويض

من $4x + 2y = 32$ نحصل على $y = 16 - 2x$.

$$2x + 6(16 - 2x) = 36$$

$$2x + 96 - 12x = 36$$

$$-10x = -60$$

$$x = 6$$

$$y = 16 - 2 \cdot 6 = 4$$

إذن التقاطع $(6, 4)$.

3. حل آخر: طريقة المربعات

نكتب المعادلتين بالصورة $ax + by = c$:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 32 \\ 2x + 6y = 36 \end{cases}$$

نبنى ثلاثة مربعات: الأوسط D من عمود معاملات x (أزرق) وعمود معاملات y (أحمر)؛ الأيسر D_x : العمود الأخضر (الأعداد بعد =) مكان عمود x ؛ الأيمن D_y : العمود الأخضر مكان عمود y .

$$D_x = \begin{array}{|c|c|} \hline 32 & 2 \\ \hline 36 & 6 \\ \hline \end{array} \quad D = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array} \quad D_y = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 32 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline \end{array}$$

في كل مربع: ضرب القطر النازل ناقص ضرب القطر الصاعد:

$$D = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 24 - 4 = 20$$

$$D_x = 32 \cdot 6 - 36 \cdot 2 = 192 - 72 = 120$$

$$D_y = 4 \cdot 36 - 2 \cdot 32 = 144 - 64 = 80$$

نقسم كل مربع جانبي على المربع الأوسط:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{120}{20} = 6$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{80}{20} = 4$$

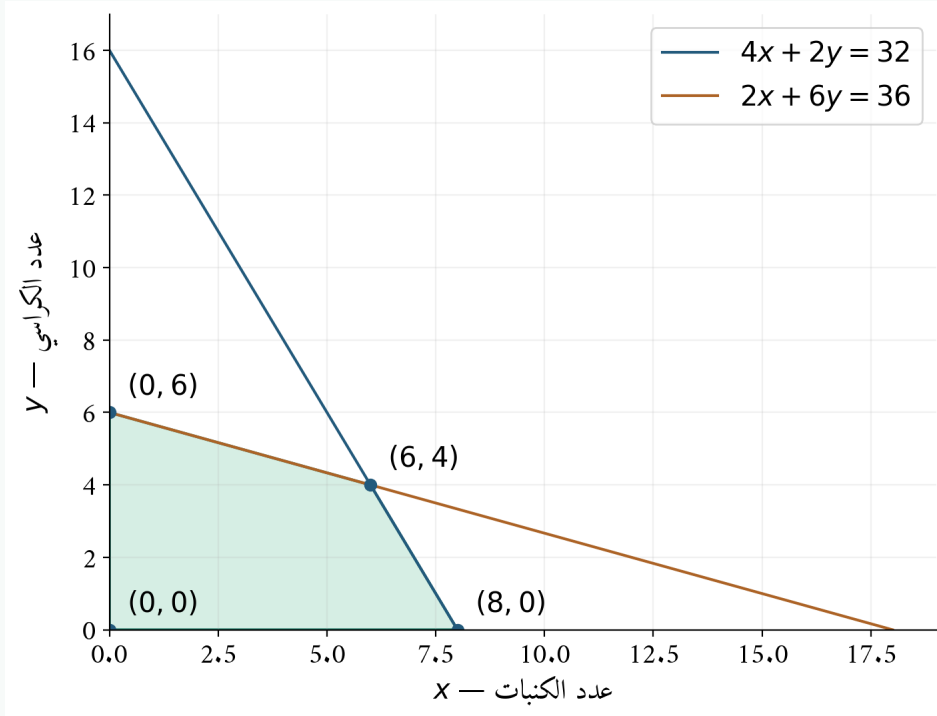
تحقق: $4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 32$ ، $2 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 36$ ، ✓

افتحوا هذه الهيئة في أداة «طريقة المربعات» واحسبوا المربعات خطوة خطوة ➔

mathbagrut.com/tools/box-method/

4 . فحص والرسم

$$\checkmark 2 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 36 \text{ و } 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 32$$



الجواب النهائي

المجال الملون في الربع الأول، ورؤوسه (0,0) ، (8,0) ، (6,4) ، (0,6) .

البند جـ (1)

ربح المصنع من كل كنبه هو 400 شيكل، ومن كل كرسي 700 شيكل.
(1) اكتبوا دالة الهدف.

1 . الجدول مع الربح

الأثاث	العدد	القص (ساعة)	التنجيد (ساعة)	الربح (شيكال)
كَنَبَات	x	$4x$	$2x$	$400x$
كِرَاسِي	y	$2y$	$6y$	$700y$
المجموع والحدّ		$4x + 2y \leq 32$	$2x + 6y \leq 36$	$P = 400x + 700y$

2 . دالة الهدف

$$P = 400x + 700y$$

نبحث عن أكبر ربح.

فحص: كنبه وكربي يعطيان $400 + 700 = 1,100$ شيكل ✓

الجواب النهائي

$$P = 400x + 700y \text{؛ الربح بالشيكول.}$$

البند ج (2)

(2) كم كنبه وكربي يجب على المصنع أن ينتج في دورة إنتاج واحدة كي يجني أكبر ربح ممكن؟

1 . جدول الرؤوس

النقطة	التعويض في P	الربح (شيكول)
(0, 0)	$400 \cdot 0 + 700 \cdot 0$	0
(8, 0)	$400 \cdot 8 + 700 \cdot 0$	3,200
(0, 6)	$400 \cdot 0 + 700 \cdot 6$	4,200
(6, 4)	$400 \cdot 6 + 700 \cdot 4$	5,200

2 . الاختيار والفحص

أكبر ربح 5,200 شيكل عند (6, 4)؛ ننتج 6 كنبات و4 كراسي.

العددان صحيحان، واستهلاك الآلتين 32 ساعة و36 ساعة؛ الحدان متحققان ✓

الجواب النهائي

6 كنبات و4 كراسي؛ ربحها الأقصى 5,200 شيكل.

البند د

في إحدى دورات الإنتاج، أنتجوا في المصنع كراسي فقط. في هذه الدورة، أنتجوا أقصى عدد ممكن من الكراسي. كم كرسياً أنتج المصنع في دورة الإنتاج هذه؟

1 . التعويض

$x = 0$ لأن الإنتاج كراسي فقط.

$$y \leq 16 \iff 2y \leq 32$$

$$y \leq 6 \iff 6y \leq 36$$

2 . الاختيار والفحص

يجب تحقيق الحدين؛ أقصى عدد 6 كراسي.

فحص: تحتاج $32 \leq 2 \cdot 6 = 12$ ساعة قص و $36 = 6 \cdot 6$ ساعة تنجيد ✓

الجواب النهائي

6 كراسي.

السؤال 2 . المثلث القائم ومساحة الشكل

الهندسة التحليلية — في الكراسة: كراسة 372 . الفصل 1 . تمهيد 2، 3، 6 - 8، 10

2. في المثلث القائم الزاوية ABC ($\angle ACB = 90^\circ$)، الرأس B يقع على المحور y ،

والضلع AB يقطع المحور x في النقطة D .

معطى أن معادلة الضلع AB هي $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

أ. جدوا إحداثيات النقطتين B و D .

النقطة D هي منتصف الضلع AB .

ب. جدوا إحداثيات الرأس A .

معطى أن معادلة الضلع BC هي $y = \frac{1}{3}x + 4$.

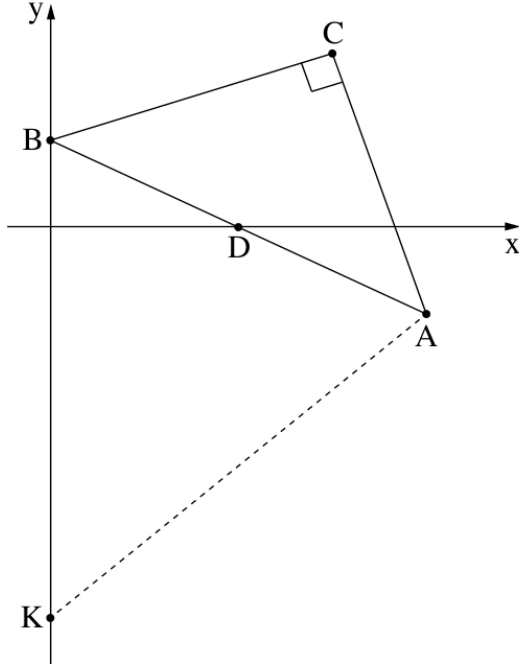
ج. (1) جدوا معادلة الضلع AC .

(2) جدوا إحداثيات الرأس C .

معطى أن $K(0, -18)$.

د. (1) احسبوا مساحة المثلث ABC .

(2) احسبوا مساحة الشكل الرباعي $BCAK$.



البند أ

في المثلث القائم الزاوية ABC ($\angle ACB = 90^\circ$)، الرأس B يقع على المحور y ، والضلع AB يقطع المحور x في النقطة D .

معطى أن معادلة الضلع AB هي $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

جدوا إحداثيات النقطتين B و D .

1 . النقطة B

B على محور y ؛ نعوض $x = 0$.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4 = 4$$

إذن $B(0, 4)$.

2 . النقطة D

D على محور x ؛ نعوض $y = 0$.

$$0 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = 4$$

$$x = 8$$

إذن $D(8, 0)$.

3. فحص

$$-\frac{1}{2} \cdot 8 + 4 = 0, \text{ والنقطة } B(0, 4) \text{ تحقق المعادلة أيضًا } \checkmark$$

الجواب النهائي

$D(8, 0)$ ، $B(0, 4)$

البند ب

النقطة D هي منتصف الضلع AB .
جدوا إحداثيات الرأس A .

1. قانون المنتصف

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}$$

2. التعويض والحساب

$$8 = \frac{x_A + 0}{2}$$

$$16 = x_A$$

$$0 = \frac{y_A + 4}{2}$$

$$0 = y_A + 4$$

$$y_A = -4$$

3 . فحص

$$D\left(\frac{16+0}{2}, \frac{-4+4}{2}\right) = D(8, 0)$$

نحصل على المنتصف المعطى ✓

الجواب النهائي

$$A(16, -4)$$

البند ج (1)

معطى أن معادلة الضلع BC هي $y = \frac{1}{3}x + 4$
(1) جدوا معادلة الضلع AC .

1 . الميل العمودي

$$m_{BC} = \frac{1}{3}, \text{ لذلك بقلب الميل وتغيير إشارته نحصل على } m_{AC} = -3$$

2 . ميل ونقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = -3(x - 16)$$

$$y + 4 = -3x + 48$$

$$y = -3x + 44$$

3 . فحص

$$\checkmark \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1 \text{ وحاصل ضرب الميلين } -3 \cdot 16 + 44 = -4$$

الجواب النهائي

$$y = -3x + 44$$

البند ج (2)

(2) جدوا إحداثيات الرأس C .

1 . الحلّ بالموازنة

$$\frac{1}{3}x + 4 = -3x + 44$$

$$\frac{1}{3}x + 3x = 40$$

$$\frac{10}{3}x = 40$$

$$x = \frac{40 \cdot 3}{10} = 12$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 12 + 4 = 8$$

إذن $C(12, 8)$.

2 . حلّ آخر: طريقة المربّعات

نكتب المعادلتين بالصورة $ax + by = c$:

$$\begin{cases} -x + 3y = 12 \\ 3x + y = 44 \end{cases}$$

نبني ثلاثة مربّعات: الأوسط D من عمود معاملات x (أزرق) وعمود معاملات y (أحمر)؛ الأيسر D_x : العمود الأخضر (الأعداد بعد =) مكان عمود x ؛ الأيمن D_y : العمود الأخضر مكان عمود y .

$$D_x = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 44 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D_y = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 3 & 44 \end{bmatrix}$$

في كلّ مربع: ضرب القطر النازل ناقص ضرب القطر الصاعد:

$$D = (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -1 - 9 = -10$$

$$D_x = 12 \cdot 1 - 44 \cdot 3 = 12 - 132 = -120$$

$$D_y = (-1) \cdot 44 - 3 \cdot 12 = -44 - 36 = -80$$

نقسم كلّ مربع جانبيّ على المربع الأوسط:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-120}{-10} = 12$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-80}{-10} = 8$$

تحقّق: $\checkmark (-1) \cdot 12 + 3 \cdot 8 = 12$ ، $\checkmark 3 \cdot 12 + 1 \cdot 8 = 44$

افتحوا هذه الهئية في أداة «طريقة المربّعات» واحسبوا المربّعات خطوة خطوة ➔

mathbagrut.com/tools/box-method/

3 . فحص في المعادلة الثانية

$$-3 \cdot 12 + 44 = 8$$

نحصل على الإحداثي نفسه ✓

الجواب النهائي

$$.C(12, 8)$$

البند د (1)

معطى أن $K(0, -18)$.

(1) احسبوا مساحة المثلث ABC .

1 . القانون والمعطيات

الزاوية C قائمة؛ لذلك AC و BC هما ضلعا القائمة.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2 . الأطوال

$$AC = \sqrt{(16 - 12)^2 + (-4 - 8)^2}$$

$$AC = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160}$$

$$BC = \sqrt{(12 - 0)^2 + (8 - 4)^2}$$

$$BC = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

3 . المساحة

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{160}}{2} = 80$$

4 . فحص

مجموع مربعي ضلعي القائمة $160 + 160 = 320$ ، ويساوي $AB^2 = 16^2 + (-8)^2 = 320$ ✓

الجواب النهائي

80 وحدة مربعة.

البند (2)

(2) احسبوا مساحة الشكل الرباعي $BCAK$.

1 . التقسيم والقاعدة

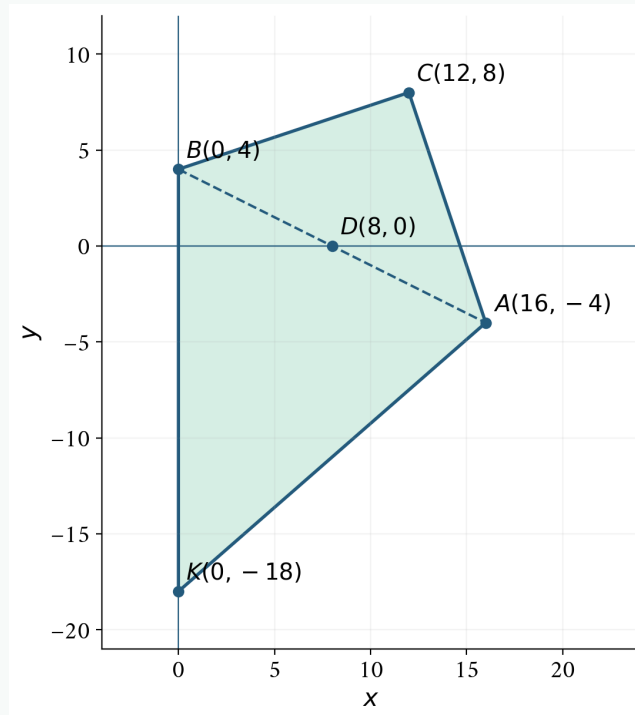
مساحة الشكل = مساحة ABC + مساحة ABK .

القاعدة BK على محور y ، طولها $4 - (-18) = 22$. ارتفاعها من A هو البعد عن محور y ، أي 16.

2 . الحساب

$$S_{ABK} = \frac{22 \cdot 16}{2} = 176$$

$$S_{BCAK} = 80 + 176 = 256$$



تقسيم الشكل $BCAK$ بالقطعة AB إلى مثلثين.

3 . ففص

المساحة 256 أكبر من مساحة كلّ مثلث؛ والقاعدتان الداخليّتان AB لا تدخلان في حدّ الشكل ✓

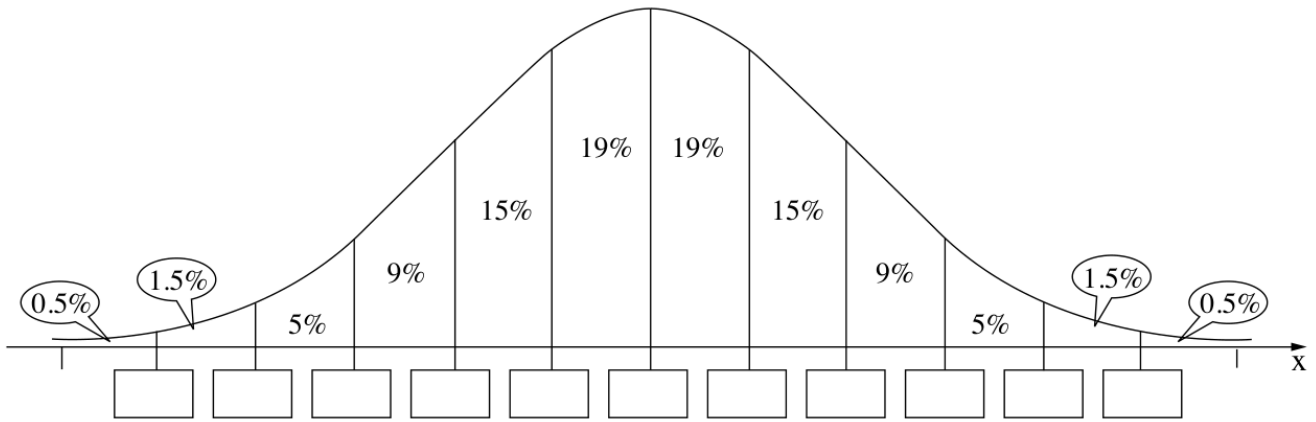
الجواب النهائيّ

256 وحدة مربّعة.

السؤال 3 . استهلاك المياه وفحص العدادات

التوزيع الطبيعي – في الكراسة: كراسة 372 . الفصل 4 . تمهيد 9، 4، 6، 11

3. استهلاك العائلات الشهري للمياه في مدينة معينة يتوزع طبيعياً، والانحراف المعياري هو 2.4 م³ (متر مكعب) .
- 16% من العائلات في هذه المدينة تستهلك أقل من 7 م³ من المياه في الشهر.
- أ. (1) جدوا معدل استهلاك العائلة الشهري للمياه في هذه المدينة .
- (2) في آخر السؤال معروض الرسم البياني للتوزيع الطبيعي . أكملوا المعطيات الناقصة لاستهلاك المياه في المستطيلات الفارغة .
- ب. ما هي النسبة المئوية للعائلات في هذه المدينة، التي تستهلك أكثر من 13 م³ من المياه في الشهر؟
- 560 عائلة في هذه المدينة تستهلك أكثر من 13 م³ من المياه في الشهر .
- ج. حسب الرسم البياني للتوزيع الطبيعي، ما هو العدد الكلي للعائلات الموجودة في هذه المدينة؟
- يُفحص عدد المياه للعائلات التي الدرجة المعيارية لاستهلاكها الشهري للمياه هي أكبر من 1.5 أو أصغر من (2.5) - .
- د. ما هي النسبة المئوية للعائلات في هذه المدينة، التي يُفحص عدد المياه الخاص بها؟
- عائلة كريم تسكن في هذه المدينة، واستهلاكها الشهري للمياه هو 12 م³ .
- هـ. هل فُحص عدد المياه الخاص بعائلة كريم؟ علّلوا إجابتكم .



البند أ (1)

- استهلاك العائلات الشهري للمياه في مدينة معينة يتوزع طبيعياً، والانحراف المعياري هو 2.4 م³ (متر مكعب) .
- 16% من العائلات في هذه المدينة تستهلك أقل من 7 م³ من المياه في الشهر.
- (1) جدوا معدل استهلاك العائلة الشهري للمياه في هذه المدينة .

1 . القفزة ومكان القيمة

$S = 2.4$ م³؛ القفزة نصفه .

$$\frac{2.4}{2} = 1.2$$

من اليسار $16 = 0.5 + 1.5 + 5 + 9$ ؛ إذن 7 يقع قفزين يسار المعدل.

2. المعدل

$$\bar{x} = 7 + 2 \cdot 1.2 = 9.4$$

3. فحص

$$9.4 - 2 \cdot 1.2 = 7, \text{ والنسبة يساره } 16\% \checkmark$$

الجواب النهائي

9.4 م³ في الشهر.

البند أ (2)

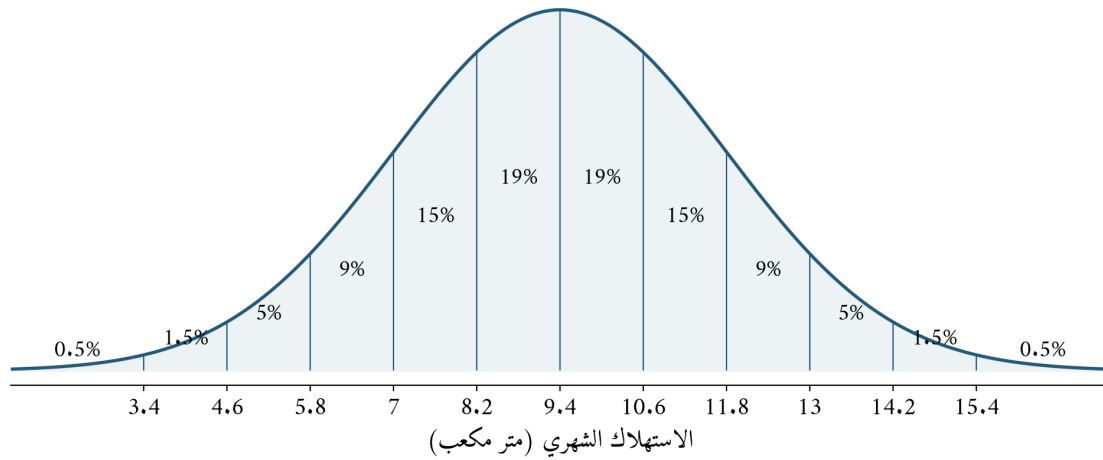
(2) في آخر السؤال معروض الرسم البياني للتوزيع الطبيعي. أكلوا المعطيات الناقصة لاستهلاك المياه في المستطيلات الفارغة.

1. المحور

القفزات	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
الاستهلاك (م ³)	3.4	4.6	5.8	7	8.2	9.4	10.6	11.8	13	14.2	15.4

2 . الرسم والفحص

المعدل 9.4 – القفزة 1.2 – الانحراف المعياري 2.4



الاستهلاك الشهري، المعدل 9.4 م³ والقفزة 1.2 م³.

فحص الطرفين: $9.4 - 5 \cdot 1.2 = 3.4$ و $9.4 + 5 \cdot 1.2 = 15.4$ ✓

الجواب النهائي

من اليسار: 3.4، 4.6، 5.8، 7، 8.2، 9.4، 10.6، 11.8، 13، 14.2، 15.4 م³.

البند ب

ما هي النسبة المئوية للعائلات في هذه المدينة، التي تستهلك أكثر من 13 م³ من المياه في الشهر؟

1 . مكان الحد

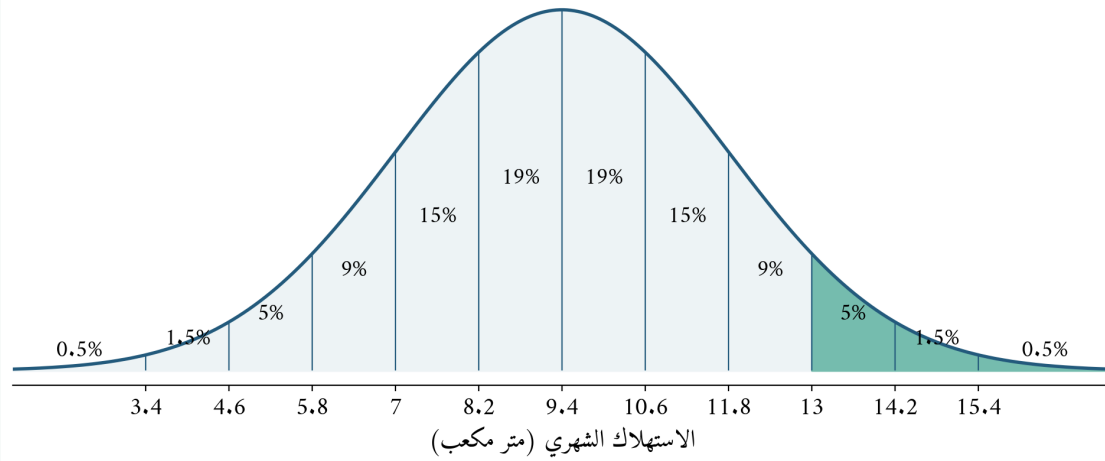
$$13 = 9.4 + 3 \cdot 1.2$$

إذن 13 يقع ثلاث قفزات يمين المعدل.

2 . جمع النسب

$$0.5 + 1.5 + 5 = 7$$

المعدل 9.4 – القفزة 1.2 – الانحراف المعياري 2.4



الاستهلاك الأكبر من 13 م³؛ مجموع الأقسام 7%.

3 . فخص

الأقسام الباقية تشكل 93%؛ $100 - 93 = 7$ % ✓

الجواب النهائي

7% من العائلات.

البند ج

560 عائلة في هذه المدينة تستهلك أكثر من 13 م³ من المياه في الشهر. حسب الرسم البياني للتوزيع الطبيعي، ما هو العدد الكلي للعائلات الموجودة في هذه المدينة؟

1 . المعطيات والقانون

560 عائلة تشكل 7%؛ العدد الكلي = العدد ÷ النسبة × 100.

2 . التعويض والحساب

$$\frac{560}{7} \cdot 100 = 80 \cdot 100 = 8,000$$

3 . فحص

$$\frac{7 \cdot 8,000}{100} = 560$$

نحصل على العدد المعطى ✓

الجواب النهائي

8,000 عائلة.

البند د

يُفحص عدد المياه للعائلات التي الدرجة المعيارية لاستهلاكها الشهري للمياه هي أكبر من 1.5 أو أصغر من (-2.5). ما هي النسبة المئوية للعائلات في هذه المدينة، التي يُفحص عدد المياه الخاص بها؟

1 . حدّا الفحص

القفزة نصف انحراف معياري، $z = 1.5$ يعني ثلاث قفزات يمين المعدل، و $z = -2.5$ يعني خمس قفزات يساره. الحدّ الأيمن:

$$x = 9.4 + 1.5 \cdot 2.4 = 13$$

الحدّ الأيسر:

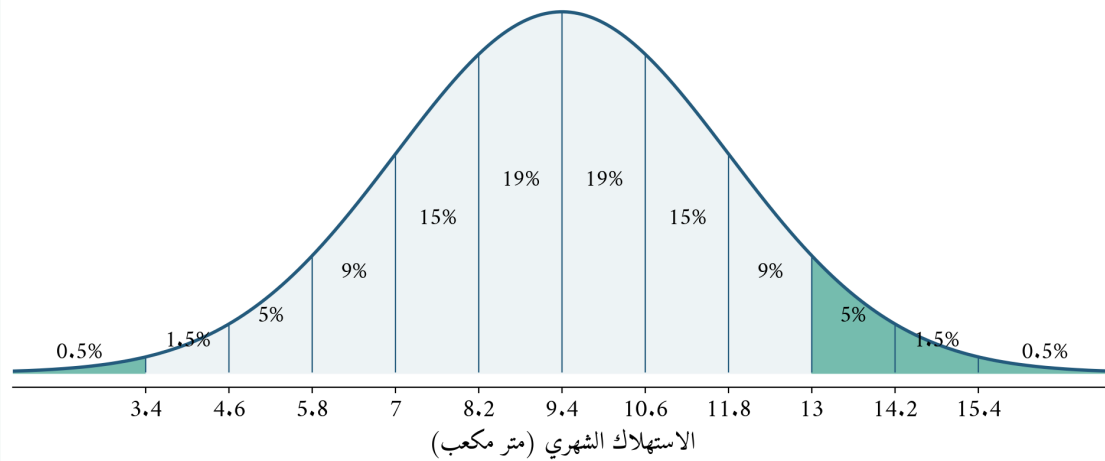
$$x = 9.4 - 2.5 \cdot 2.4 = 3.4$$

2 . جمع الطرفين

فوق 13 توجد $5 + 1.5 + 0.5\%$ ، وتحت 3.4 توجد 0.5% .

$$7 + 0.5 = 7.5$$

المعدل 9.4 – القفزة 1.2 – الانحراف المعياري 2.4



العائلات التي يَفْحَصُ عدّادها؛ الطرف الأيسر 0.5% والطرف الأيمن 7.5%.

3 . فحص

الفحص لا يشمل الوسط؛ مجموع الطرفين 7.5% ويبقى $100 - 7.5 = 92.5\%$ في الوسط ✓

الجواب النهائي

7.5% من العائلات.

البند هـ

عائلة كريم تسكن في هذه المدينة، واستهلاكها الشهري للمياه هو 12 م³. هل فُحِصَ عدد المياه الخاص بعائلة كريم؟ علّلوا إجابتكم.

1 . القانون والتعويض

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

$$z = \frac{12 - 9.4}{2.4} = \frac{2.6}{2.4} \approx 1.08$$

2 . القرار والفحص

الدرجة 1.08 ليست أكبر من 1.5 وليست أصغر من -2.5؛ إذن لا يُفحص العداد.
فحص بالقيم الأصلية: $13 < 12 < 3.4$ ؛ الاستهلاك بين حدّي الفحص ✓

الجواب النهائي

لا؛ درجتها المعيارية نحو 1.08، وهي بين -2.5 و 1.5.

السؤال 4 . الزلاجة المائية

الموديل التربيعي - في الكرّاسة: كرّاسة 372 . الفصل 3 . تمهيد 3، 4، 6، 8 - 10

4. في متنزّه مائيّ توجد زلاجة مائيّة شكلها قطع مكافئ معادلته $y = x^2 - 6x + 11$. يصعدون إلى الزلاجة من سلّم عموديّ يبدأ من الأرض، في النقطة O (نقطة أصل المحاور)، وينتهي في النقطة A .

المحور x موضوع على الأرض ويصف البعد (بالأمتار) عن السلّم . المحور y يصف ارتفاع الزلاجة (بالأمتار) فوق الأرض .

بدأ نعيم بالترحلق على الزلاجة من النقطة A .

وَأَصَلَ نعيم حتّى النقطة B ، ومن هناك عاد إلى النقطة C ،

كما هو موصوف في الرسم .

النقطة C هي نقطة النهاية الصغرى للقطع المكافئ .

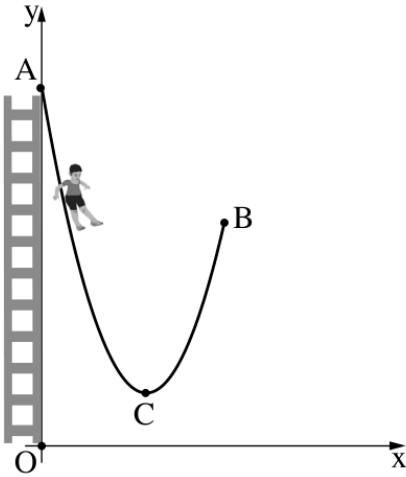
أ . جدوا ارتفاع السلّم (AO) .

ب . جدوا في أيّ ارتفاع فوق الأرض تقع النقطة C .

تقع النقطة B في ارتفاع 6 أمتار فوق الأرض .

جـ . جدوا الإحداثيّ x للنقطة B .

د . جدوا بالنسبة لأية قيم لـ x كان نعيم في توجّه صعود .



البند أ

في متنزّه مائيّ توجد زلاجة مائيّة شكلها قطع مكافئ معادلته $y = x^2 - 6x + 11$. يصعدون إلى الزلاجة من سلّم عموديّ يبدأ من الأرض، في النقطة O (نقطة أصل المحاور)، وينتهي في النقطة A . المحور x موضوع على الأرض ويصف البعد (بالأمتار) عن السلّم . المحور y يصف ارتفاع الزلاجة (بالأمتار) فوق الأرض . بدأ نعيم بالترحلق على الزلاجة من النقطة A . وَأَصَلَ نعيم حتّى النقطة B ، ومن هناك عاد إلى النقطة C ، كما هو موصوف في الرسم . النقطة C هي نقطة النهاية الصغرى للقطع المكافئ . جدوا ارتفاع السلّم (AO) .

1 . التعويض

A على محور y ، إذن $x = 0$.

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11$$

2 . الاستنتاج والفحص

ارتفاع السلم 11 متراً؛ وهو الحدّ الثابت في الدالة، أي تقاطع المنحنى مع محور y ✓

الجواب النهائي

11 متراً.

البند ب

جدوا في أي ارتفاع فوق الأرض تقع النقطة C .

1 . المعاملات وقانون الرأس

$$c = 11, b = -6, a = 1$$

$$x_C = \frac{-b}{2a}$$

2 . التعويض والحساب

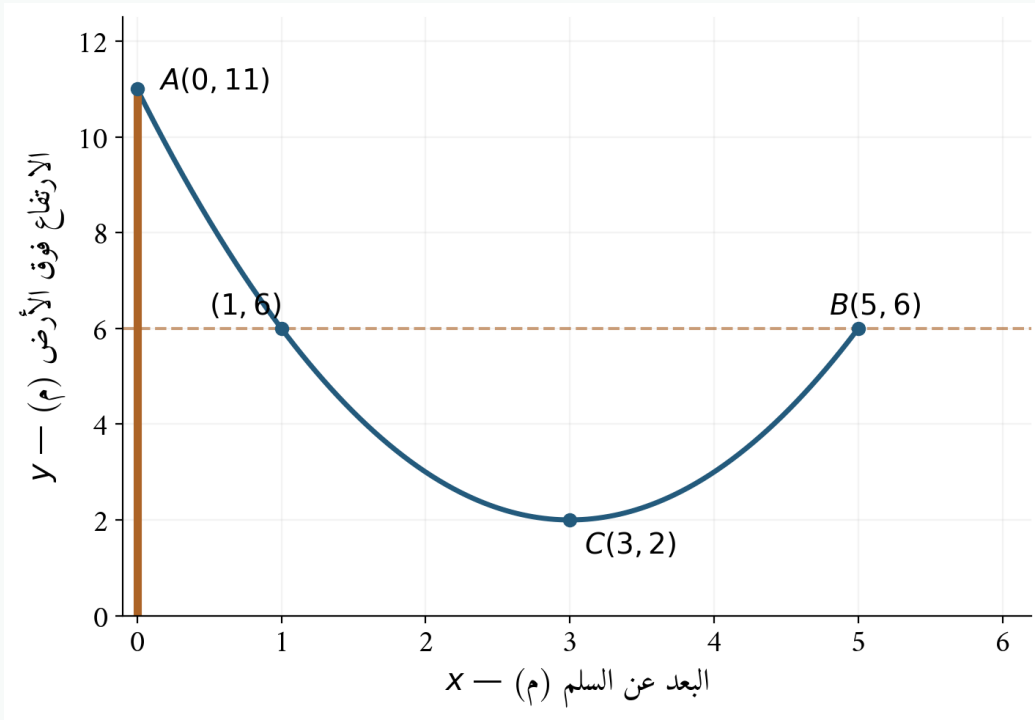
$$x_C = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

$$y_C = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11$$

$$y_C = 9 - 18 + 11 = 2$$

3 . الاستنتاج والرسم

لأن $a > 0$ ، فإنّ $C(3, 2)$ نقطة نهاية صغرى؛ ارتفاعها متران.



الزلاجة من $A(0, 11)$ حتى $B(5, 6)$ أدنى نقطة $C(3, 2)$.

4 . فحص

$y(2) = 3$ و $y(4) = 3$ ؛ نقطتان متماثلتان أعلى من الرأس ✓

الجواب النهائي

متران فوق الأرض.

البند ج

تقع النقطة B في ارتفاع 6 أمتار فوق الأرض.
جدوا الإحداثي x للنقطة B .

1 . المعادلة والمعاملات

$$x^2 - 6x + 11 = 6$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

إذن $a = 1$ ، $b = -6$ ، $c = 5$.

2 . المميز والقانون

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5$$

3 . الاختيار والفحص

B يمين C في الرسم؛ نختار $3 < x_B = 5$. الحلّ $x = 1$ على الجهة الأخرى من الزلاجة.

$$5^2 - 6 \cdot 5 + 11 = 25 - 30 + 11 = 6$$

الارتفاع كما في المعطى ✓

الجواب النهائي

$x_B = 5$ أمتار.

البند د

جدوا بالنسبة لآية قيم لـ x كان نعيم في توجّه صعود.

1 . مسار نعيم

من A إلى C ينخفض الارتفاع، ومن C إلى B يرتفع. عندما يعود من B إلى C ينخفض ارتفاعه مرّة أخرى.

2 . المجال والفحص

$$3 < x < 5$$

فحص أثناء الذهاب: $y(3) = 2$ ثمّ $y(4) = 3$ ثمّ $y(5) = 6$ ؛ الارتفاع يصعد ✓

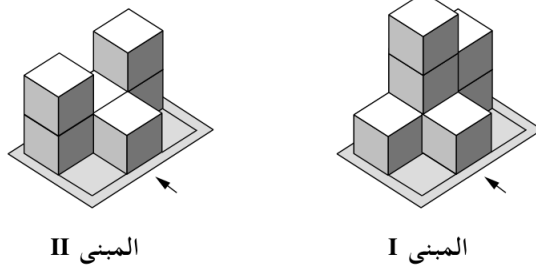
الجواب النهائي

$3 < x < 5$ أثناء الحركة من C إلى B .

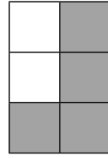
السؤال 5 . المبنيان والنظرات

الرؤية الفراغية — في الكراسة: كراسة 372 . الفصل 6 . تمهيد 2، 4 - 7، 9

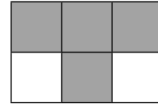
5. الرسم الذي أمامكم يصف مَبْنِيَّيْن II-I، مَبْنِيَّيْن من مكعبات متطابقة. السهم في الرسم في كل واحد من المَبْنِيَّيْن يُشير إلى اتجاه النظرة من الأمام. كل مكعب في المبنى موضوع على السطح أو على مكعب آخر.



أمامكم نظرة من الأعلى ونظرة من اليمين، ثلاثمان أحد المَبْنِيَّيْن.

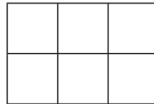


نظرة من
اليمين



نظرة من
الأعلى

- أ. أي من المَبْنِيَّيْن يلائم النظرتين المُعطَتَيْن في السؤال؟
ب. ارسما النظرة من الأمام للمبنى الذي اخترتموه في البند "أ".
ج. (1) كم مكعباً يمكن إزالته من المبنى الذي اخترتموه في البند "أ" بدون أن تتغير النظرة من الأعلى والنظرة من اليمين؟
(2) أكملوا في القالب الذي أمامكم مخطط الأعداد للمبنى بعد الإزالة.



- د. حدّدوا بالنسبة لكل واحد من القولّين 1-2 اللّذين أمامكم إذا كان صحيحاً أم غير صحيح.
1. النظرة من الأمام والنظرة من الخلف للمبنى I متطابقتان.
2. النظرة من الأمام والنظرة من الخلف للمبنى II متطابقتان.

البند أ

- الرسم الذي أمامكم يصف مَبْنِيَّيْن II-I، مَبْنِيَّيْن من مكعبات متطابقة. السهم في الرسم في كل واحد من المَبْنِيَّيْن يُشير إلى اتجاه النظرة من الأمام. كل مكعب في المبنى موضوع على السطح أو على مكعب آخر. أمامكم نظرة من الأعلى ونظرة من اليمين، ثلاثمان أحد المَبْنِيَّيْن. أي من المَبْنِيَّيْن يلائم النظرتين المُعطَتَيْن في السؤال؟

1 . مخطّطان مساعدان

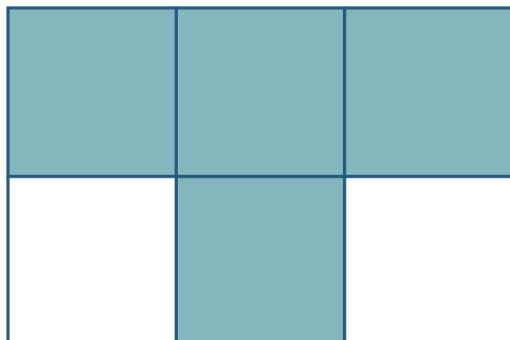
I			II		
1	3	2	2	1	2
0	1	0	0	1	0
↑ الأمام			↑ الأمام		

مخطّطا أعداد المبنيين؛ الأمام أسفل كلّ مخطّط.

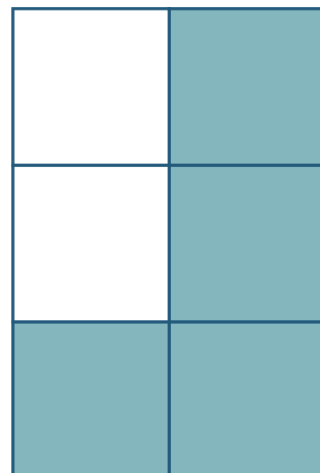
2 . المقارنة

في المبنيين الأماكن المشغولة نفسها: ثلاثة في الخلف وواحد في وسط الأمام.
من اليمين، ارتفاع الصفّ الأمامي 1 والخلفي 3 في المبني I؛ أمّا الخلفي في II فارتحاعه 2.
النظرة المعطاة تبلغ 3 مكعبات؛ لذلك المبني I هو الملائم.

من الأعلى



من اليمين



النظرة من الأعلى ومن اليمين للمبنى I؛ تطابقان المعطى.

الجواب النهائي

المبنى I؛ يطابق الأماكن المشغولة وارتفاع 3 في النظرة من اليمين.

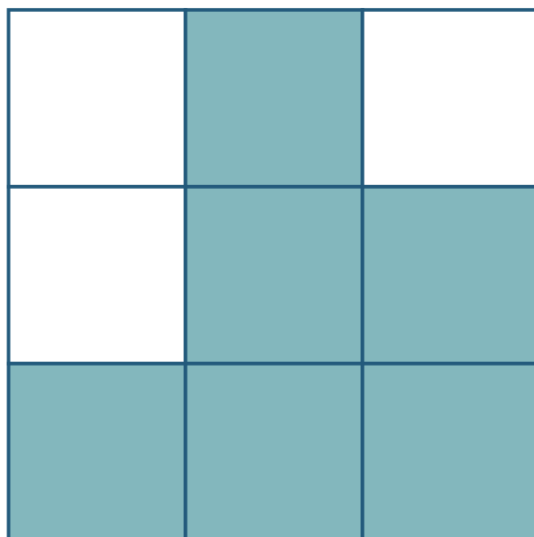
البند ب

ارسموا النظرة من الأمام للمبنى الذي اخترتموه في البند "أ".

1 . الارتفاعات

في المبنى I، أكبر ارتفاعات الأعمدة من اليسار 1, 3, 2.

النظرة من الأمام

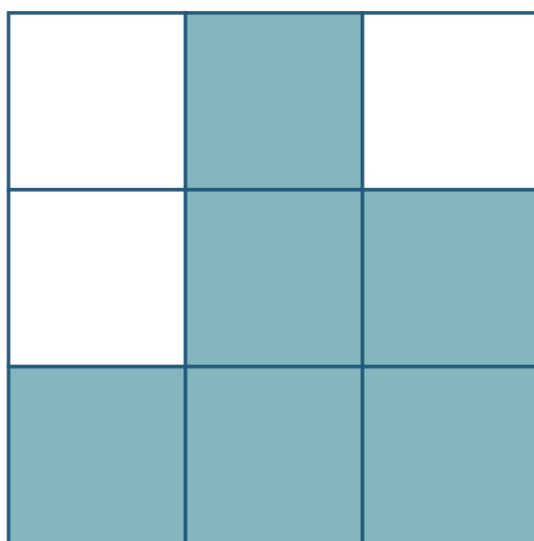


النظرة من الأمام للمبنى I؛ ارتفاعاتها 1، 2، 3.

فحص: وسط النظرة يصل إلى 3، والعمود الأيمن إلى 2، والأيسر إلى 1 ✓

الجواب النهائي

النظرة من الأمام



النظرة من الأمام للمبنى I.

البند ج (1)

(1) كم مكعباً يمكن إزالته من المبنى الذي اخترتموه في البند "أ" بدون أن تتغير النظرة من الأعلى والنظرة من اليمين؟

1 . شروط الإبقاء

من الأعلى يجب أن تبقى الأماكن الأربعة مشغولة. من اليمين يجب أن يبقى أقصى ارتفاع الصف الخلفي 3 والأمامي 1.

2 . الإزالة الممكنة

الصف الخلفي 1, 3, 2 يصبح 1, 3, 1؛ نزيل المكعب الأعلى من العمود ذي الارتفاع 2. يبقى الصف الأمامي 0, 1, 0.

3 . فحص الحد الأقصى

بعد الإزالة، كل عمود غير عمود الارتفاع 3 لا يحتوي إلا مكعباً واحداً. إزالة آخر مكعب تغير النظرة من الأعلى، وتخفيض عمود 3 يغير النظرة من اليمين؛ لا يمكن إزالة أكثر ✓

الجواب النهائي

مكعب واحد.

البند ج (2)

(2) أكملوا في القلب الذي أمامكم مخطط الأعداد للمبنى بعد الإزالة.

بعد الإزالة

1	3	1
0	1	0

الأمام



بعد إزالة مكعب واحد؛ الخلف 1، 3، 1 والأمام 0، 1، 0.

2 . فحص

المجموع الأصلي $7 = 1 + 3 + 2 + 1$ والجديد $6 = 1 + 3 + 1 + 1$ ؛ أزيل مكعب واحد. الأماكن المشغولة ثابتة وأقصى ارتفاعي الصفين 3 و 1 ✓

الجواب النهائي

بعد الإزالة

1	3	1
0	1	0

↑
الأمم

مخطط الأعداد بعد الإزالة.

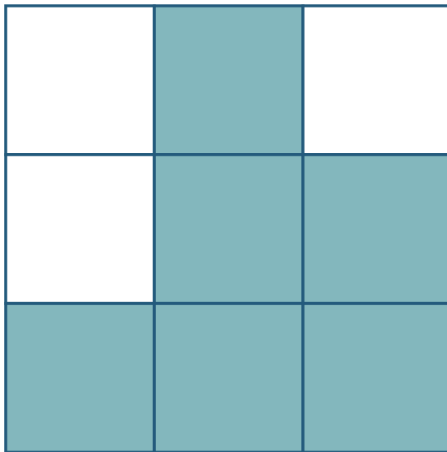
البند (1)

حدّدوا بالنسبة لكل واحد من القولين 1-2 اللذين أمامكم، إذا كان صحيحاً أم غير صحيح.
1. النظرة من الأمام والنظرة من الخلف للمبنى I متطابقتان.

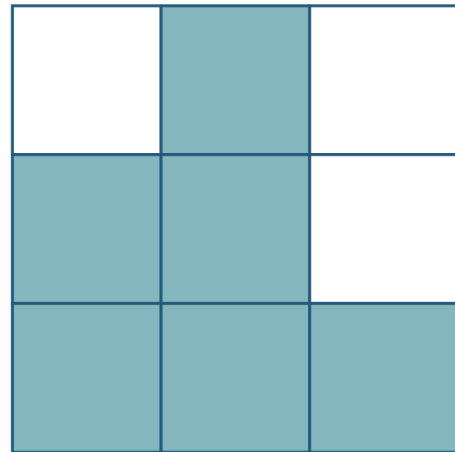
1 . المقارنة

الأمم من اليسار 1, 3, 2، والخلف 1, 3, 2. الترتيبان مختلفان.

من الأمام



من الخلف



النظرتان من الأمام والخلف للمبنى I.

2 . فحص

العمود الأيسر ارتفاعه 1 من الأمام و2 من الخلف؛ لذلك القول غير صحيح ✓

الجواب النهائي

غير صحيح؛ الأمام 1, 3, 2 والخلف 2, 3, 1.

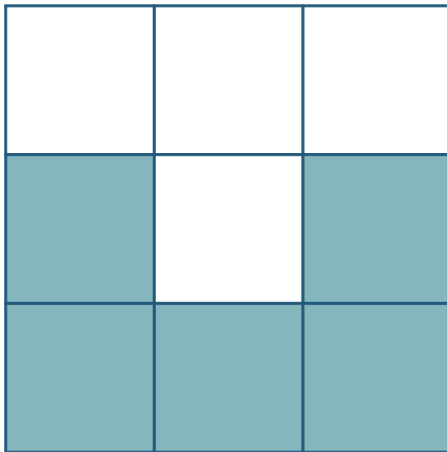
البند د (2)

2. النظرة من الأمام والنظرة من الخلف للمبنى II متطابقتان.

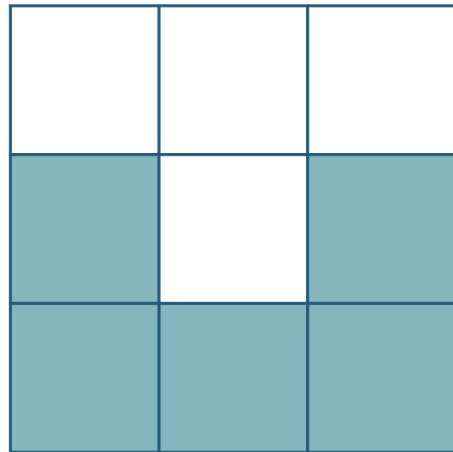
1 . المقارنة

أكبر ارتفاعات أعمدة المبنى II هي 2, 1, 2 من الأمام؛ وعكس ترتيبها من الخلف يعطي 2, 1, 2 أيضًا.

من الأمام



من الخلف



النظرتان من الأمام والخلف للبنى II.

2 . فحص

العمودان الطرفيان متساويان، والعمود الأوسط لا يتغير مكانه؛ القول صحيح ✓

الجواب النهائي

صحيح؛ ارتفاعات النظرتين من اليسار 2, 1, 2.

السؤال 6 . شموع هرمية ومخروطية

الأجسام في الفراغ – في الكراسة: كراسة 372 . الفصل 5 . تمهيد 5، 7، 10

6. يُنتجون في مصنع معين نوعين من الشموع:

شمعة من النوع "أ"، شكلها هرم قائم قاعدته مربع،

وشمعة من النوع "ب"، شكلها مخروط قائم (انظروا الرسم).

معطى أن طول ضلع قاعدة الشمعة من النوع "أ" هو 6 سم،

وارتفاع الشمعة هو 12 سم.

أ. جدوا حجم مادة الشمع في الشمعة من النوع "أ".

معطى أن طول نصف قطر قاعدة الشمعة من النوع "ب"

هو 4 سم، وارتفاع الشمعة هو 10 سم.

كلما كان حجم مادة الشمع في الشمعة أكبر –

أضاءت الشمعة لمدة أطول.

ب. حدّدوا أيّة شمعة ستُضيء لمدة أطول – الشمعة من النوع "أ" أم الشمعة من النوع "ب". علّلوا تحديدكم.

ج. (1) جدوا طول الخطّ الراسم للشمعة من النوع "ب".

(2) جدوا مساحة غلاف الشمعة من النوع "ب".

في أحد الأيام، تلقى المصنع طلبية لإنتاج 300 شمعة من النوع "أ" و 250 شمعة من النوع "ب".

د. هل يكفي حجم 60,000 سم³ من مادة الشمع كي يُنتج المصنع هذه الطلبية؟ علّلوا إجابتكم.

البند أ

يُنتجون في مصنع معين نوعين من الشموع:

شمعة من النوع "أ"، شكلها هرم قائم قاعدته مربع،

وشمعة من النوع "ب"، شكلها مخروط قائم (انظروا الرسم).

معطى أن طول ضلع قاعدة الشمعة من النوع "أ" هو 6 سم، وارتفاع الشمعة هو 12 سم.

جدوا حجم مادة الشمع في الشمعة من النوع "أ".

1 . المعطيات والقانون

$a = 6$ سم، $h = 12$ سم.

$$V = \frac{a^2 h}{3}$$

2 . التعويض والحساب

$$V_A = \frac{6^2 \cdot 12}{3} = \frac{36 \cdot 12}{3} = 144$$

3 . فحص

حجم الصندوق ذي القاعدة والارتفاع نفسيهما $36 \cdot 12 = 432$ ، وحجم الهرم ثلثه 144 سم^3 ✓

الجواب النهائي

144 سم^3 .

البند ب

معطى أنّ طول نصف قطر قاعدة الشمعة من النوع "ب" هو 4 سم، وارتفاع الشمعة هو 10 سم. كلّما كان حجم مادّة الشمع في الشمعة أكبر — أضاءت الشمعة لمدة أطول. حدّدوا أيّة شمعة ستضيء لمدة أطول — الشمعة من النوع "أ" أم الشمعة من النوع "ب". علّلوا تحديدكم.

1 . قانون حجم المخروط

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

2 . التعويض والحساب

$$V_B = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 10}{3}$$

$$V_B = \frac{160\pi}{3} \approx 167.55$$

3 . المقارنة والفحص

$167.55 > 144$ ؛ الشمعة "ب" تحتوي شمعاً أكثر، فتضيء لمدة أطول.

نقارن المجمين بوحدة سم^3 نفسها ✓

الجواب النهائي

الشمعة "ب"؛ حجمها نحو 167.55 سم^3 ، أكبر من 144 سم^3 للشمعة "أ".

البند ج (1)

(1) جدوا طول الخطّ الراسم للشمعة من النوع "ب".

1 . فيثاغورس

$$l^2 = r^2 + h^2$$

2 . التعويض والحساب

$$l^2 = 4^2 + 10^2 = 16 + 100 = 116$$

$$l = \sqrt{116} \approx 10.77$$

3 . فحص

الخطّ الراسم موجب وأطول من الارتفاع 10؛ ومربع طوله الدقيق 116 ✓

الجواب النهائي

$$l \approx \sqrt{116} \text{ سم}$$

البند ج (2)

(2) جدوا مساحة غلاف الشمعة من النوع "ب".

1 . القانون

$$S = \pi r l$$

2 . التعويض والحساب

$$S = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{116}$$

$$S = 4\pi\sqrt{116} \approx 135.34$$

3 . فحص

استعمل طول الخطّ الراسم الدقيق دون تقريب مبكّر؛ والوحدة سم² ✓

الجواب النهائي

$$135.34 \approx 4\pi\sqrt{116} \text{ سم}^2.$$

البند د

في أحد الأيام، تلقى المصنع طلبية لإنتاج 300 شمعة من النوع "أ" و 250 شمعة من النوع "ب". هل يكفي حجم 60,000 سم³ من مادة الشمع كي يُنتج المصنع هذه الطلبية؟ علّلوا إجابتكم.

1 . الحجم الكلي

$$V = 300V_A + 250V_B$$

$$V = 300 \cdot 144 + 250 \cdot \frac{160\pi}{3}$$

$$V = 43,200 + \frac{40,000\pi}{3}$$

$$V \approx 85,087.90$$

2 . المقارنة والفحص

$85,087.90 > 60,000$ ؛ الكمية لا تكفي.

فحص: شمعة النوع "أ" وحده يحتاج 43,200 سم³، فيبقى 16,800؛ شمعة النوع "ب" يحتاج نحو 41,887.90 سم³، أكبر من الباقي ✓

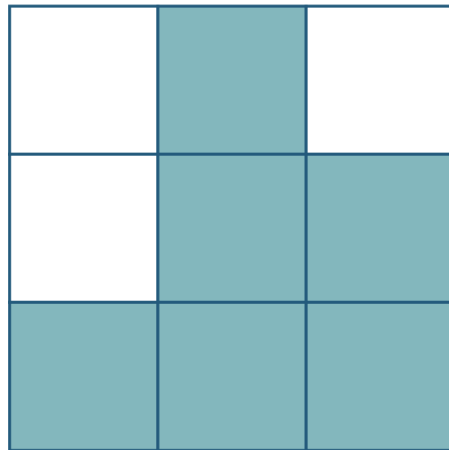
الجواب النهائي

لا؛ المطلوب نحو 85,087.90 سم³، أكبر من 60,000 سم³.

الإجابات النهائية

السؤال	البند	الجواب
1	أ	$4x + 2y \leq 32$ ، $2x + 6y \leq 36$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ؛ أعداد القطع صحيحة.
	ب	المجال الملوّن في الربع الأوّل، ورؤوسه $(0,0)$ ، $(8,0)$ ، $(6,4)$ ، $(0,6)$.
	ج (1)	$P = 400x + 700y$ ؛ الربح بالشيكّل.
	ج (2)	6 كنبات و4 كراسيّ، ربحها الأقصى 5,200 شيكل.
	د	6 كراسيّ.
2	أ	$D(8,0)$ ، $B(0,4)$
	ب	$A(16,-4)$
	ج (1)	$y = -3x + 44$
	ج (2)	$C(12,8)$
	د (1)	80 وحدة مربّعة.
3	أ (1)	9.4 م ³ في الشهر.
	أ (2)	من اليسار: 3.4 ، 4.6 ، 5.8 ، 7 ، 8.2 ، 9.4 ، 10.6 ، 11.8 ، 13 ، 14.2 ، 15.4 م ³ .
	ب	7% من العائلات.
	ج	8,000 عائلة.
	د	7.5% من العائلات.
4	هـ	لا؛ درجتها المعياريّة نحو 1.08 ، وهي بين -2.5 و1.5.
	أ	11 متراً.
	ب	متراً فوق الأرض.
	ج	$x_B = 5$ أمتار.
	د	$3 < x < 5$ أثناء الحركة من C إلى B.
5	أ	المبنى I، يطابق الأماكن المشغولة وارتفاع 3 في النظرة من اليمين.
	ب	

النظرة من الأمام



النظرة من الأمام للبنى I.

مكعب واحد.

ج (1)

ج (2)

بعد الإزالة

1	3	1
0	1	0

↑
الأمام

مخطط الأعداد بعد الإزالة.

غير صحيح؛ الأمام 1, 3, 2 والخلف 2, 3, 1.

د (1)

صحيح؛ ارتفاعات النظرتين من اليسار 2, 1, 2.

د (2)

144 سم³.

أ

الشمعة "ب"؛ حجمها نحو 167.55 سم³، أكبر من 144 سم³ للشمعة "أ".

ب

$10.77 \approx \sqrt{116}$ سم.

ج (1)

$135.34 \approx 4\pi\sqrt{116}$ سم².

ج (2)

لا؛ المطلوب نحو 85,087.90 سم³، أكبر من 60,000 سم³.

د

6