دالّة ومشتقّتها مجموعهما e^x

معادلة صغيرة، وعائلة كاملة من الدوالّ، ودالّتان مشهورتان

نبحث عن دالّة إذا جمعناها مع مشتقّتها حصلنا على e^x. يبدو أنّ الشرط يحتاج إلى «معادلات تفاضليّة» لا يتعلّمها الطلّاب في المدرسة — لكنّ حيلة واحدة ذكيّة تجعل السؤال كلّه في متناول طالب 5 وحدات.

الأستاذ خالد خطيب

السؤال

5 وحدات · التفاضل والتكامل

معطاة دالّة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرّتين، تحقّق لكلّ x:

$$f(x) + f'(x) = e^x.$$

أ) نعرّف $g(x) = e^x f(x)$. بيّن أنّ $g'(x) = e^{2x}$.

ب) استنتج أنّ كلّ دالّة تحقّق الشرط هي من الصورة $f(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$، حيث C عدد ثابت.

ت) تحقّق أنّ كلّ دالّة من هذه الصورة تحقّق الشرط فعلًا.

ث) برهن أنّ $f''(x) = f(x)$ لكلّ دالّة تحقّق الشرط.

ج) جد الدالّة الزوجيّة f التي تحقّق الشرط.

ح) للدالّة التي وجدتها في البند ج: برهن أنّ $f^2(x) - \big(f'(x)\big)^2 = 1$ لكلّ x، وجد قيمتها الصغرى.

* * *

خ) هل توجد دالّة **فرديّة** تحقّق الشرط؟ إذا كانت موجودة فجِدها.

تلميح للبند أ

اشتقّوا g حسب قاعدة مشتقّة حاصل الضرب، وأخرجوا e^x عاملًا مشتركًا. ماذا تعرفون عن المجموع $f(x)+f'(x)$؟

تلميح للبند ب

دالّتان مشتقّتاهما متساويتان تختلفان بعدد ثابت. جدوا دالّة واحدة مشتقّتها e^{2x}، ثمّ عودوا من g إلى f.

تلميح للبند خ

اكتبوا الشرط $f(-x)=-f(x)$ للصورة $\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$، وقارنوا معاملَي e^x وe^{-x} في الطرفين.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

أ) وفق قاعدة حاصل الضرب:

$$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\big(f(x)+f'(x)\big)=e^x\cdot e^x=e^{2x}.$$

ب) الدالّة $\frac{1}{2}e^{2x}$ مشتقّتها e^{2x} أيضًا، لذا $g(x)$ و$\frac{1}{2}e^{2x}$ تختلفان بثابت: $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$. نقسم على $e^x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{g(x)}{e^x}=\tfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}.$$

أي أنّه لا توجد حلول أخرى: كلّ حلّ هو من هذه الصورة.

ت) $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-Ce^{-x}$، لذا

$f(x)+f'(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x-Ce^{-x}=e^x$. ✓ إذن الشرط يحدّد بالضبط عائلة

دوالّ ذات «وسيط» واحد C.

ث) نشتقّ طرفَي الشرط: $f''(x)+f'(x)=e^x$. نطرح منه الشرط الأصليّ $f(x)+f'(x)=e^x$ فنحصل على $f''(x)-f(x)=0$، أي $f''=f$. (أو مباشرةً من الصورة: $f(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ ⟵ $f''(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$.)

ج) الشرط $f(-x)=f(x)$: $\frac{1}{2}e^{-x}+Ce^{x}=\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{-x}$، أي $\left(C-\frac{1}{2}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ لكلّ x. إذن $C=\frac{1}{2}$ و

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

ح) $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$، لذا

$$f^2-(f')^2=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{4}=\frac{4e^xe^{-x}}{4}=1.$$

$f'(x)=0$ فقط عندما $e^x=e^{-x}$، أي $x=0$؛ وإشارة f' سالبة يسار الصفر وموجبة يمينه، لذا القيمة الصغرى $f(0)=1$. (ومن الهويّة أيضًا: $f^2=1+(f')^2\geq 1$.)

خ) الشرط $f(-x)=-f(x)$: $\frac{1}{2}e^{-x}+Ce^{x}=-\frac{1}{2}e^{x}-Ce^{-x}$، أي $\left(C+\frac{1}{2}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)=0$. إذن $C=-\frac{1}{2}$، والدالّة الفرديّة موجودة:

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

لاحظوا: الدالّة الزوجيّة والدالّة الفرديّة اللتان وجدناهما هما بالضبط مشتقّة إحداهما للأخرى، ومجموعهما e^x. ■

ما وراء السؤال

للدالّتين اللتين ظهرتا في البندين ج و خ اسمان خاصّان: **جيب التمام الزائديّ** $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ **والجيب الزائديّ** $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. الهويّة التي برهنتموها في البند ح، $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$، تشبه الهويّة

المعروفة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ — مع إشارة ناقص. وكما أنّ النقطة $(\cos t, \sin t)$ تقع على الدائرة $x^2 + y^2 = 1$، فإنّ النقطة $(\cosh t, \sinh t)$ تقع على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$، ومن هنا التسمية.

والرسم البيانيّ للدالّة $\cosh x$ مألوف أكثر ممّا يبدو: هذا هو شكل سلسلة أو حبل معلّق من طرفيه، ويُسمّى «منحنى السلسلة».

أمّا الحيلة في البند أ — الضرب بـ e^x — فهي ليست صدفة: إنّها الطريقة العامّة لحلّ كلّ شرط من النوع $f + f' = h(x)$. جرّبوها مثلًا على $f(x) + f'(x) = 1$.

الأستاذ خالد خطيب · سؤال تحدٍّ