مقالة في الهندسة

مبرهنة فارينيون

متوازي أضلاع مختبئ في كلّ رباعيّ

ارسموا أيّ شكل رباعيّ — منتظمًا أو «فوضويًّا»، محدّبًا أو مقعّرًا — وصِلوا منتصفات أضلاعه الأربعة بالترتيب. ستحصلون دائمًا على متوازي أضلاع. هذا هو «النظام الخفيّ» في الأشكال التي تبدو غير منتظمة، ومنه نستخرج بسهولة صيغًا للمساحة وللمحيط، ونعرف متى يكون الشكل المختبئ مستطيلًا أو معيّنًا أو مربّعًا.

الأستاذ خالد خطيب

نعرف من دروس الهندسة أنّ القطعة المتوسّطة في المثلث — التي تصل بين منتصفَي ضلعين — موازية للضلع الثالث وتساوي نصفه. مبرهنة فارينيون هي ما يحدث عندما نطبّق هذه الحقيقة البسيطة مرّتين، في مثلثين يتقاسمان قطرًا واحدًا في الشكل الرباعيّ. والنتيجة مدهشة: مهما رسمنا الرباعيّ «عشوائيًّا»، يختبئ في داخله شكل منتظم.

المبرهنة

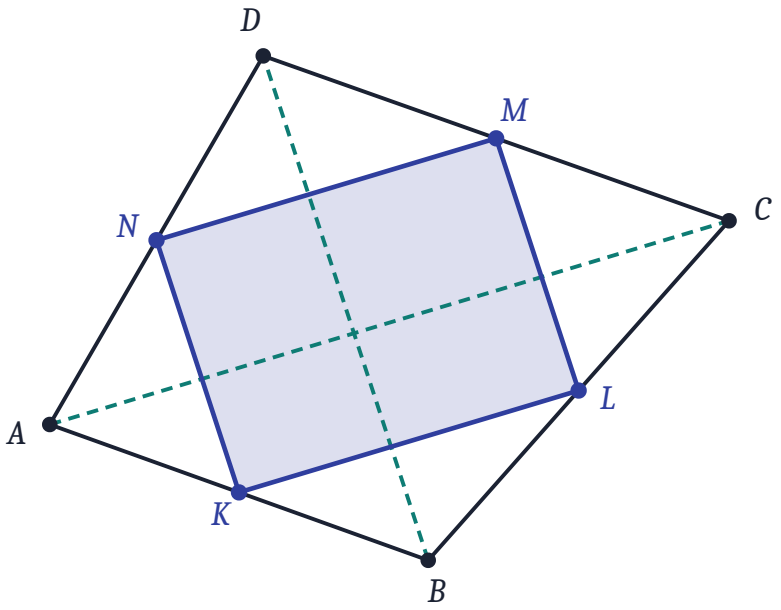
مبرهنة فارينيون

لتكن K, L, M, N منتصفات الأضلاع AB, BC, CD, DA في الشكل الرباعيّ $ABCD$. عندئذٍ:

الشكل $KLMN$ متوازي أضلاع، وأضلاعه موازية لقطرَي الرباعيّ وتساوي نصفيهما.

مساحته نصف مساحة الرباعيّ: $\boxed{S_{KLMN} = \frac{1}{2}\, S_{ABCD}}$

محيطه يساوي مجموع القطرين: $\boxed{P_{KLMN} = AC + BD}$



متوازي الأضلاع KLMN الذي رؤوسه منتصفات الأضلاع. **بالأخضر المتقطّع** — قطرا الرباعيّ AC وBD: كلّ ضلع في متوازي الأضلاع موازٍ لأحدهما.

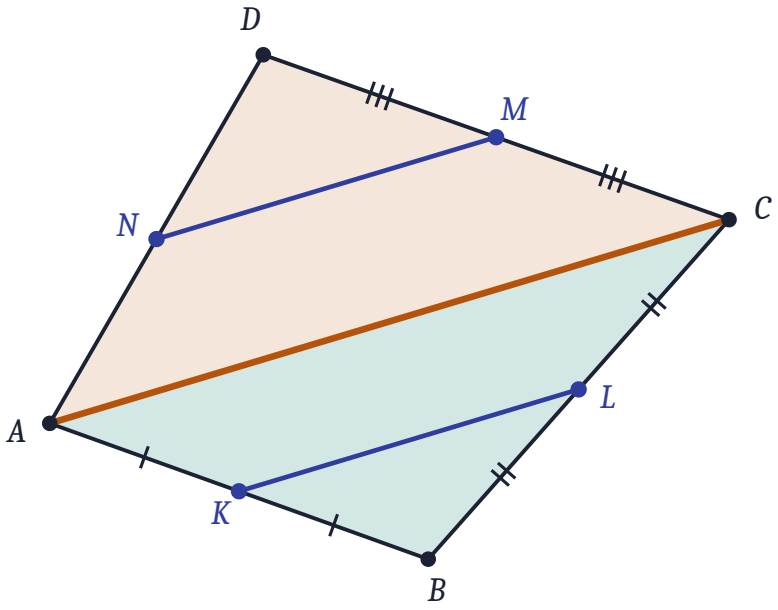
ملاحظة: البند الأوّل صحيح لكلّ أربع نقاط في المستوي (وحتّى في الفضاء، عندما لا تقع النقاط في مستوٍ واحد!). أمّا بند المساحة فنتحدّث فيه عن رباعيّ «بسيط»، أي لا تتقاطع أضلاعه — محدّبًا كان أم مقعّرًا.

لمحة تاريخية

بيير فارينيون (1654–1722) رياضيّ فرنسيّ، كان صديقًا لنيوتن ولايبنتس وللأخوين برنولي، ومن أوائل من تبنّوا في فرنسا حساب التفاضل والتكامل الجديد ودافعوا عنه. وتحمل اسمَه أيضًا مبرهنة في علم السكون (الميكانيكا) تتعلّق بعزوم القوى.

أمّا المبرهنة الهندسية فظهرت في كتابه التعليميّ «مبادئ الرياضيات» (Elemens de mathematique) الذي نُشر عام 1731، بعد وفاته. من المفاجئ أنّ نتيجة بهذه البساطة — تحتاج فقط إلى القطعة المتوسّطة في المثلث، المعروفة منذ إقليدس — لم تُذكر صراحةً في الكتب قبل ذلك بكثير.

البرهان



القطر AC يقسم الرباعيّ إلى المثلثين ABC وACD. في كلّ منهما **قطعة متوسّطة** موازية لـ AC.

1 قطعتان متوسّطتان

في المثلث ABC القطعة KL تصل بين منتصفَي ضلعين، لذا $KL \parallel AC$ و$KL = \frac{1}{2}AC$. وفي المثلث ACD القطعة NM تصل بين منتصفَي ضلعين، لذا $NM \parallel AC$ و$NM = \frac{1}{2}AC$.

2 متوازي أضلاع

إذن KL وNM متوازيتان ومتساويتان. رباعيّ فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان هو متوازي أضلاع. (وبالطريقة نفسها مع القطر BD: $LM \parallel BD \parallel KN$ و$LM = KN = \frac{1}{2}BD$.)

3 المحيط

$$P_{KLMN} = 2 \cdot \tfrac{1}{2}AC + 2 \cdot \tfrac{1}{2}BD = AC + BD.$$

4 **المساحة: نقصّ أربع زوايا**

(للرباعيّ المحدّب.) المثلث KBL مشابه للمثلث ABC بنسبة $\frac{1}{2}$، لذا مساحته ربع مساحته: $S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. وبالمثل $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ACD}$. نجمع: $S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. وباستعمال القطر الآخر BD: $S_{NAK} + S_{LCM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. المثلثات الأربعة عند الرؤوس تأخذ معًا نصف المساحة، ويبقى لمتوازي الأضلاع النصف الآخر:

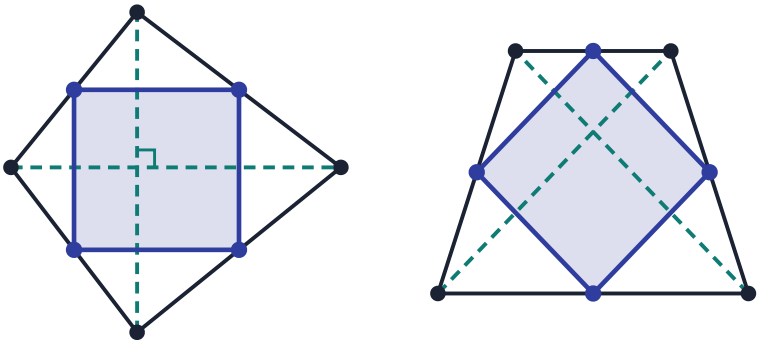
$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \qquad \blacksquare$$

في الرباعيّ المقعّر يبقى الادّعاء صحيحًا (جرّبوا في المختبر!)، لكنّ البرهان يحتاج إلى عناية أكبر، لأنّ أحد المثلثات «الزاوية» يبرز خارج الشكل.

متى يكون مستطيلًا؟ معيّنًا؟ مربّعًا؟

أضلاع متوازي الأضلاع موازية للقطرين، لذا **زاويته تساوي الزاوية بين القطرين، وأطوال أضلاعه هي نصفا القطرين.** من هنا مباشرةً:

شرط على قطرَي الرباعيّ	متوازي أضلاع فارينيون	أمثلة
$AC \perp BD$	مستطيل	المعيّن، الطائرة الورقيّة (الدالتون)
$AC = BD$	معيّن	المستطيل، شبه المنحرف المتساوي الساقين
$AC \perp BD$ و $AC = BD$	مربّع	المربّع



في الرسم الأيسر: قطران متعامدان، فمتوازي الأضلاع مستطيل. في الرسم الأيمن: شبه منحرف متساوي الساقين — قطراه متساويان، فمتوازي الأضلاع معيّن.

لاحظوا المفارقة الجميلة: «المستطيل يلد معيّنًا، والمعيّن يلد مستطيلًا». والشرط لا يتعلّق بالرباعيّ نفسه بل بقطريه فقط: يكفي أن يتعامد القطران كي يختبئ في الرباعيّ مستطيل، حتّى لو كانت أضلاعه كلّها مختلفة.

نتيجة: مساحة كلّ رباعيّ من قطريه

لتكن θ الزاوية بين القطرين. متوازي أضلاع فارينيون ضلعاه $\frac{AC}{2}$ و$\frac{BD}{2}$ والزاوية بينهما θ، لذا مساحته $\frac{AC}{2}\cdot\frac{BD}{2}\sin\theta$. ووفق المبرهنة هي نصف مساحة الرباعيّ، إذن

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}\,AC\cdot BD\cdot\sin\theta.$$

صيغة واحدة لكلّ رباعيّ محدّب. وعندما يتعامد القطران ($\sin\theta = 1$) نحصل على الصيغة المعروفة لمساحة المعيّن والدالتون: نصف حاصل ضرب القطرين.

مثال عددي

في الرباعيّ المحدّب $ABCD$ طولا القطرين $AC = 10$ و$BD = 6$، والزاوية بينهما 30°. جدوا محيط متوازي أضلاع فارينيون ومساحته، ومساحة الرباعيّ.

الحلّ. ضلعا متوازي الأضلاع $\frac{10}{2} = 5$ و$\frac{6}{2} = 3$، لذا محيطه $2(5+3) = 16 = AC + BD$. مساحته

$$S_{KLMN} = 5\cdot 3\cdot\sin 30^\circ = 7.5, \qquad S_{ABCD} = 2\cdot 7.5 = 15.$$

وللتحقّق بالصيغة: $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot \sin 30^\circ = 15$. ✓ لاحظوا أنّنا لم نعرف أيّ ضلع من أضلاع الرباعيّ — يكفي القطران والزاوية بينهما.

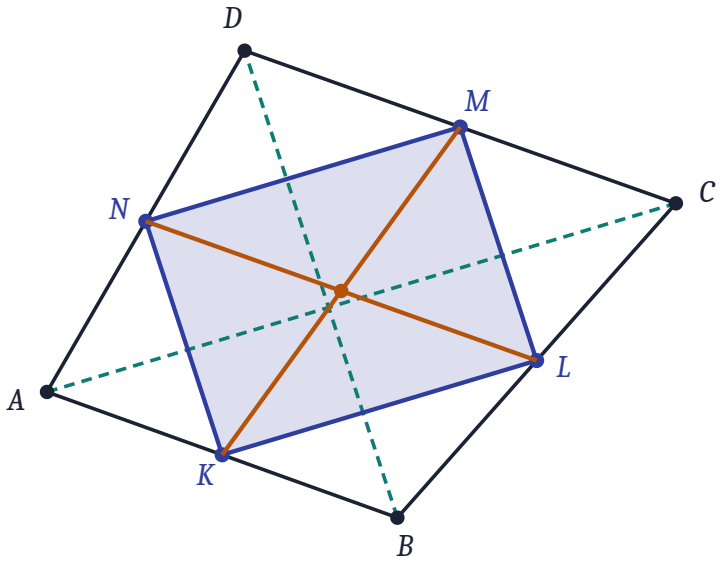
تمرين للقرّاء: القطعتان المتوسّطتان في الرباعيّ

تمرين

القطعة KM تصل بين منتصفَي الضلعين المتقابلين AB وCD، والقطعة LN بين منتصفَي BC وDA. برهنوا:

القطعتان KM وLN تنصّف إحداهما الأخرى.

$$KM^2 + LN^2 = \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$



القطعتان KM و LN هما قطرا متوازي أضلاع فارينيون.

تلميح

ما العلاقة بين KM, LN ومتوازي الأضلاع $KLMN$؟ وتذكّروا «قانون متوازي الأضلاع»: في كلّ متوازي أضلاع، مجموع مربّعَي القطرين يساوي مجموع مربّعات الأضلاع الأربعة.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

KM وLN هما قطرا متوازي الأضلاع $KLMN$. قطرا متوازي الأضلاع ينصّف أحدهما الآخر — وهذا البند الأوّل.

وفق قانون متوازي الأضلاع (الذي ينتج مثلًا من قانون جيوب التمام في المثلثين KLM وLMN، لأنّ زاويتين متجاورتين في متوازي الأضلاع متكاملتان وجيبا تمامهما متعاكسان):

$$KM^2 + LN^2 = KL^2 + LM^2 + MN^2 + NK^2 = 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{A}{}$$

نتيجة جانبية: نقطة التقاء KM وLN هي أيضًا منتصف القطعة الواصلة بين منتصفَي القطرين AC وBD. (برهنوا ذلك بتطبيق المبرهنة على «الرباعيّ» $ABDC$ — لاحظوا أنّ البند الأوّل في المبرهنة لا يحتاج إلى أن يكون الرباعيّ بسيطًا!)

المراجع

P. Varignon, *Elemens de mathematique*, Paris, 1731.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 3.

الأستاذ خالد خطيب · مبرهنة فارينيون