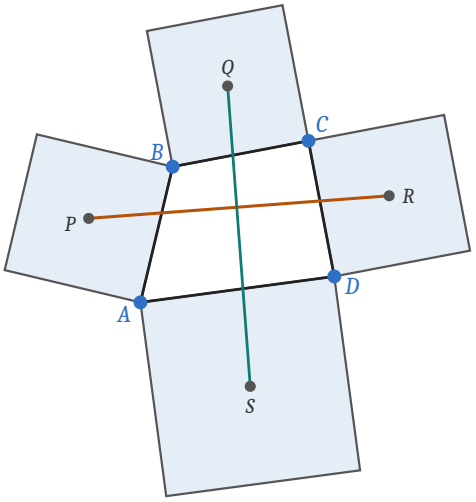
مبرهنة فان أوبل – الهندسة المستوية

5 وحدات رياضيات

تنصّ **مبرهنة فان أوبل** على أنّه إذا بنينا على أضلاع أيّ شكل رباعي مربّعات إلى الخارج، فإنّ القطعتين اللتين تصلان بين مركزَي كلّ مربّعين متقابلين متساويتان ومتعامدتان.



برهان النظرية:

رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ مرتّبة باتّجاه عقارب الساعة، وعلى أضلاعه بُنيت مربّعات إلى الخارج (انظر الرسم).

- $P,\ Q,\ R,\ S$ هي مراكز المربّعات المبنيّة على $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ على الترتيب.
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{p},\vec{q},\vec{r},\vec{s}$ هي متّجهات المواقع (من نقطة الأصل) للنقاط A,B,C,D,P,Q,R,S.
- لكلّ متّجه $\vec{u}=(x,y)$ نعرّف $\rho(\vec{u})=(-y,\ x)$.

أ) برهن أنّ: (1) $|\rho(\vec{u})|=|\vec{u}|$ (2) $\vec{u}\cdot\rho(\vec{u})=0$ (3) $\rho(\vec{u}+\vec{v})=\rho(\vec{u})+\rho(\vec{v})$ و$\rho(k\vec{u})=k\rho(\vec{u})$ (4) $\rho(\rho(\vec{u}))=-\vec{u}$.
ماذا يفعل ρ بالمتّجه هندسيًّا؟

ب) لتكن M منتصف AB. اشرح لماذا $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\rho\left(\overrightarrow{AB}\right)$، واستنتج أنّ $\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\rho(\vec{b}-\vec{a})$.
اكتب تعابير مماثلة لـ $\vec{q},\vec{r},\vec{s}$.

ت) نرمز: $\vec{u}=\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}$، $\vec{w}=\vec{a}+\vec{d}-\vec{b}-\vec{c}$. برهن أنّ
$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\rho(\vec{w})$ و $\overrightarrow{QS}=\frac{1}{2}\vec{w}-\frac{1}{2}\rho(\vec{u})$.

ث) برهن أنّ $\overrightarrow{QS}=-\rho\left(\overrightarrow{PR}\right)$، واستنتج أنّ $PR=QS$ وأنّ $PR\perp QS$.

معطى: $A(0,0)$، $B(0,4)$، $C(6,6)$، $D(4,0)$ (الرؤوس مرتّبة باتّجاه عقارب الساعة).

ج) (1) جد إحداثيّات النقاط $P,\ Q,\ R,\ S$.
(2) بيّن بالحساب أنّ $PR=QS$ وأنّ $PR\perp QS$.

* * *

ح) نفرض أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. برهن أنّ الشكل الرباعي $PQRS$ مربّع.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب