مقالة في الهندسة

مبرهنة فان أوبل

أربعة مربّعات حول رباعيّ، وقطعتان متساويتان ومتعامدتان

خذوا أيّ شكل رباعيّ، وابنوا على كلّ ضلع من أضلاعه مربّعًا إلى الخارج. صِلوا مركزَي المربّعين على ضلعين متقابلين، ثم مركزَي المربّعين الآخرين. القطعتان اللتان تحصلون عليهما متساويتان في الطول ومتعامدتان — دائمًا، مهما كان الرباعيّ. والبرهان يحتاج إلى أداة واحدة فقط: الدوران بزاوية قائمة.

الأستاذ خالد خطيب

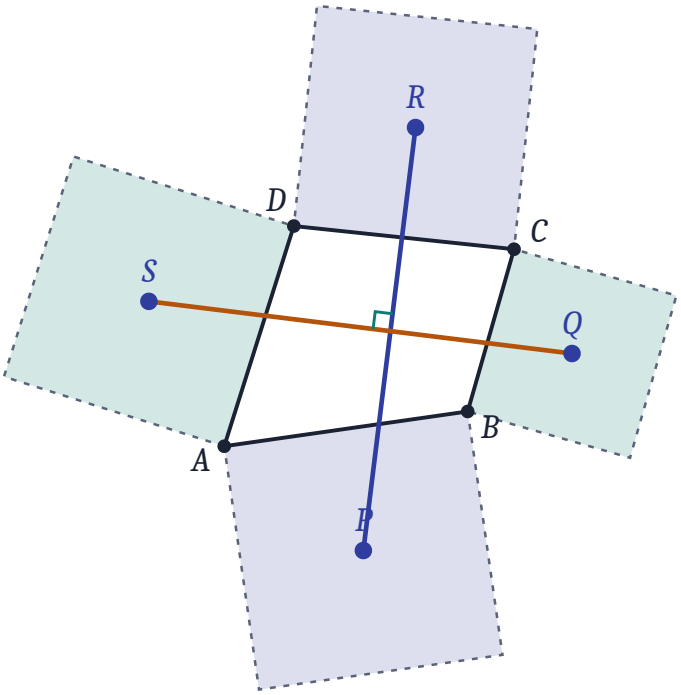
في كثير من مسائل الهندسة يظهر «تعامد» أو «تساوٍ» لا نتوقّعه. مبرهنة فان أوبل من أجمل الأمثلة على ذلك: الرباعيّ عشوائيّ تمامًا، أضلاعه وزواياه مختلفة، ومع ذلك تنتج المربّعات الأربعة شكلًا فيه انتظام كامل. في هذه المقالة نرى لماذا يحدث ذلك، ونتعرّف على طريقة برهان بالمتّجهات تصلح لمسائل كثيرة أخرى.

المبرهنة

مبرهنة فان أوبل

نبني على أضلاع الرباعيّ $ABCD$ مربّعات إلى الخارج، ونرمز إلى مراكزها بـ P, Q, R, S (على الأضلاع AB, BC, CD, DA على الترتيب). عندئذٍ القطعتان PR وQS — اللتان تصلان بين مركزَي مربّعين متقابلين —

$$PR = QS \quad \text{و} \quad PR \perp QS$$



القطعة **PR** تصل بين مركزَي المربّعين على AB وCD، والقطعة **QS** بين مركزَي المربّعين على BC وDA. طولاهما متساويان، والزاوية بينهما قائمة.

ملاحظة: المبرهنة صحيحة أيضًا للرباعيّ المقعّر. المهمّ أن تُبنى المربّعات الأربعة كلّها «إلى الخارج» بالمعنى نفسه — أي كلّها على الجانب نفسه عندما نسير على الأضلاع بالترتيب $A \to B \to C \to D \to A$.

لمحة تاريخية

نشر المبرهنةَ الرياضيُّ الهولنديّ هنريكوس (هنري) فان أوبل (1830–1906) عام 1878، في مقالة قصيرة في المجلّة البلجيكية Nouvelle Correspondance Mathématique تتناول مراكز مربّعات تُبنى على أضلاع مضلّع. ومنذ ذلك الحين صارت المبرهنة نقطة انطلاق لعشرات التعميمات: بدل المربّعات يمكن بناء أشكال أخرى متشابهة، وبدل الرباعيّ يمكن أخذ مضلّعات أخرى.

وهناك حالة خاصّة شهيرة: عندما يكون الرباعيّ متوازي أضلاع تشكّل المراكز الأربعة مربّعًا. اشتهرت هذه الحالة باسم «مسألة تيبو الأولى»، على اسم الرياضيّ الفرنسيّ فيكتور تيبو الذي اقترحها كمسألة في القرن العشرين.

الأداة: الدوران بزاوية قائمة

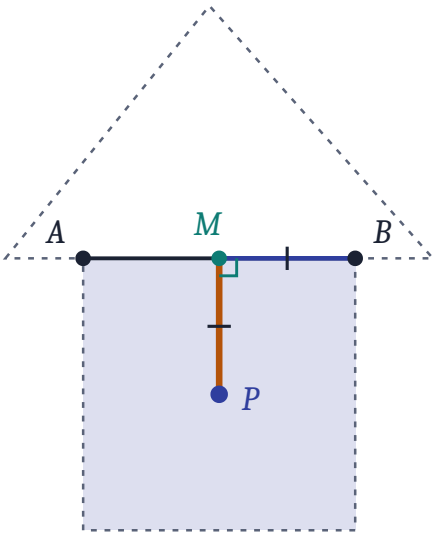
نعمل في هيئة محاور، ونعامل النقاط كمتّجهات. نعرّف عمليّة ρ («رو») تدير كلّ متّجه بزاوية $90°$:

$$\rho(x, y) = (-y,\ x).$$

تحقّقوا بأنفسكم من ثلاث خواصّ بسيطة:

- ρ لا تغيّر الطول، والمتّجه $\rho(u)$ عموديّ على u (حاصل الضرب العدديّ $x\cdot(-y) + y\cdot x = 0$).
- ρ خطّيّة: $\rho(u+w) = \rho(u) + \rho(w)$ و$\rho(k\,u) = k\,\rho(u)$.
- دورانان متتاليان بزاوية قائمة هما دوران بـ $180°$: $\rho(\rho(u)) = -u$.

إذن لكي نبرهن أنّ قطعتين متساويتان ومتعامدتان، يكفي أن نبرهن أنّ إحداهما (كمتّجه) هي **دوران** الأخرى: $\overrightarrow{QS} = \rho(\overrightarrow{PR})$.



مركز المربّع P نصل إليه من منتصف الضلع M بخطوة عموديّة على AB **طولها نصف الضلع**: $MP = MB$ و$MP \perp AB$.

البرهان

نفترض أنّ الرؤوس A, B, C, D مرتّبة عكس اتّجاه عقارب الساعة (وإلّا نعكس اتّجاه الدوران في كلّ مكان، والبرهان لا يتغيّر).

1 مركز مربّع واحد

المنتصف M للضلع AB هو $\frac{A+B}{2}$. المتّجه $\overrightarrow{MB} = \frac{B-A}{2}$؛ نديره المتّجه المعاكس له بزاوية $\frac{A-B}{2}$ قائمة فنحصل على خطوة طولها نصف الضلع، عموديّة عليه ومتّجهة إلى الخارج. إذن

$$P = \frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\rho(A-B).$$

وبالطريقة نفسها: $Q = \frac{B+C}{2} + \frac{1}{2}\rho(B-C)$، $R = \frac{C+D}{2} + \frac{1}{2}\rho(C-D)$، $S = \frac{D+A}{2} + \frac{1}{2}\rho(D-A)$.

2 المتّجهان

نطرح ونستعمل خطّيّة ρ:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = \tfrac{1}{2}\Big[(C+D-A-B) + \rho(C-D-A+B)\Big],$$

$$\overrightarrow{QS} = S - Q = \tfrac{1}{2}\Big[(D+A-B-C) + \rho(D-A-B+C)\Big].$$

3 نذير $\overrightarrow{PR}$

نطبّق ρ على $\overrightarrow{PR}$، ونستعمل $\rho(\rho(u)) = -u$ في الحدّ الثاني:

$$\rho(\overrightarrow{PR}) = \tfrac{1}{2}\Big[\rho(C+D-A-B) - (C-D-A+B)\Big] = \tfrac{1}{2}\Big[(D+A-B-C) +$$

قارنوا مع $\overrightarrow{QS}$: الحدّ الأوّل نفسه، وفي الحدّ الثاني ρ لنفس المجموع $C+D-A-B$. إذن

$$\overrightarrow{QS} = \rho(\overrightarrow{PR}),$$

أي أنّ QS هي PR بعد دوران بزاوية قائمة: طولاهما متساويان وهما متعامدتان. ■

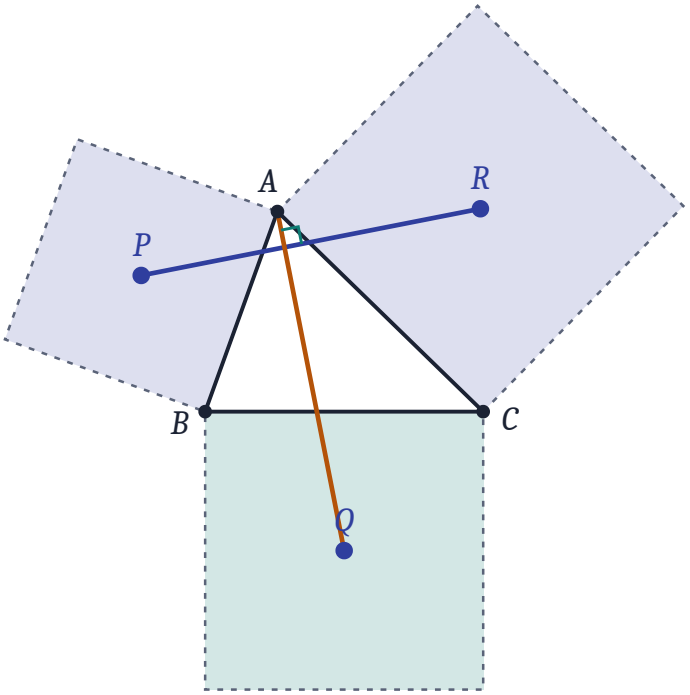
حالتان خاصّتان

1 متوازي الأضلاع: المراكز تشكّل مربّعًا

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فالشكل كلّه متناظر حول مركز متوازي الأضلاع (دوران بـ $180°$ ينقل كلّ مربّع إلى المربّع المقابل له). لذا القطعتان PR وQS تمرّان بهذا المركز وتنصّف إحداهما الأخرى. رباعيّ قطراه متساويان ومتعامدان وينصّف أحدهما الآخر هو مربّع — وهذه «مسألة تيبو الأولى». جرّبوا الزرّ «متوازي أضلاع» في المختبر.

2 المثلث: نقرّب D من A

البرهان لم يستعمل في أيّ مكان أنّ D مختلفة عن A. إذا وضعنا $D = A$ يختفي المربّع على الضلع DA ويصبح مركزه $S = A$. نحصل على مبرهنة عن المثلث: نبني مربّعات خارجية على أضلاع المثلث ABC مراكزها P (على AB) وQ (على BC) وR (على CA). عندئذٍ القطعة PR مساوية للقطعة QA وعموديّة عليها.



حالة المثلث: **PR** و**QA** متساويتان ومتعامدتان.

مثال عددي

رؤوس الرباعيّ: $A(0,0)$، $B(4,0)$، $C(5,3)$، $D(1,4)$ (بعكس اتّجاه عقارب الساعة). نحسب المراكز وفق صيغة الخطوة 1. مثلًا للضلع AB: المنتصف $(2,0)$، و$A-B=(-4,0)$، و$\rho(-4,0)=(0,-4)$، لذا

$$P=(2,0)+\tfrac{1}{2}(0,-4)=(2,-2).$$

وبالطريقة نفسها: $Q=(6,1)$، $R=(3.5,\ 5.5)$، $S=(-1.5,\ 2.5)$. إذن

$$\overrightarrow{PR}=(1.5,\ 7.5),\qquad \overrightarrow{QS}=(-7.5,\ 1.5)=\rho(1.5,\ 7.5).$$

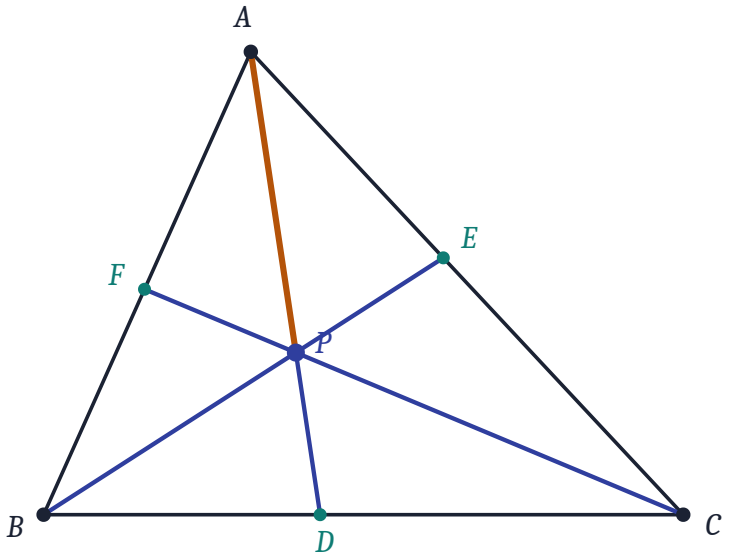
تحقّق: $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=1.5\cdot(-7.5)+7.5\cdot 1.5=0$، والطولان $\sqrt{1.5^2+7.5^2}=\sqrt{58.5}\approx 7.65$ متساويان. ✓

تمرين للقرّاء: «فان آوبل» آخر — في المثلث

تمرين

تحمل اسم فان أوبل أيضًا علاقة جميلة في المثلث. لتلتقِ القطع $AD,\ BE,\ CF$ في المثلث ABC في النقطة P (حيث D, E, F على الأضلاع BC, CA, AB). برهنوا أنّ

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}.$$



النسبة التي تقسم بها P **القطعة AD** هي مجموع النسبتين على الضلعين الخارجين من A.

تلميح

استعملوا المساحات كما في برهان مبرهنة تشيفا: عبّروا عن كلّ واحدة من النسب الثلاث بنسبة بين مساحتَي مثلثين رأسهما المشترك P.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

نرمز بـ S_{XYZ} إلى مساحة المثلث XYZ. المثلثان ABP وDBP لهما الارتفاع نفسه من B على المستقيم AD، وكذلك المثلثان ACP وDCP من C. لذا

$$\frac{AP}{PD} = \frac{S_{ABP}}{S_{DBP}} = \frac{S_{ACP}}{S_{DCP}} = \frac{S_{ABP}+S_{ACP}}{S_{DBP}+S_{DCP}} = \frac{S_{ABP}+S_{ACP}}{S_{BPC}}.$$

(استعملنا: إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ فإنّ $\frac{x}{y} = \frac{x+u}{y+v}$.) ومن برهان مبرهنة تشيفا نعرف أنّ

$$\frac{AF}{FB} = \frac{S_{ACP}}{S_{BPC}}, \qquad \frac{AE}{EC} = \frac{S_{ABP}}{S_{BPC}}.$$

نجمع ونحصل على الطرف الأيمن نفسه:

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{S_{ACP}+S_{ABP}}{S_{BPC}} = \frac{AP}{PD}. \qquad \blacksquare$$

حالة خاصّة: في مركز الثقل كلّ متوسط يقسم ضلعه إلى نصفين، فنحصل على $\frac{AP}{PD} = 1+1 = 2$ — النتيجة المعروفة بأنّ مركز الثقل يقسم المتوسط بنسبة $2:1$.

المراجع

H. van Aubel, “Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d’un polygone quelconque”, *Nouvelle Correspondance Mathématique* 4 (1878), 40–44.

الأستاذ خالد خطيب · مبرهنة فان أوبل