مقالة في الهندسة

مستقيم سيمسون

ثلاثة أعمدة، وثلاث نقاط على استقامة واحدة

نأخذ نقطة P وننزل منها أعمدة على أضلاع مثلث. نحصل على ثلاث نقاط — مواقع الأعمدة — وهي عادةً رؤوس مثلث صغير. لكن إذا وقعت P على الدائرة المحيطة بالمثلث، ينهار المثلث الصغير إلى قطعة مستقيمة: المواقع الثلاثة على مستقيم واحد. وهذه الحالة الوحيدة التي يحدث فيها ذلك.

الأستاذ خالد خطيب

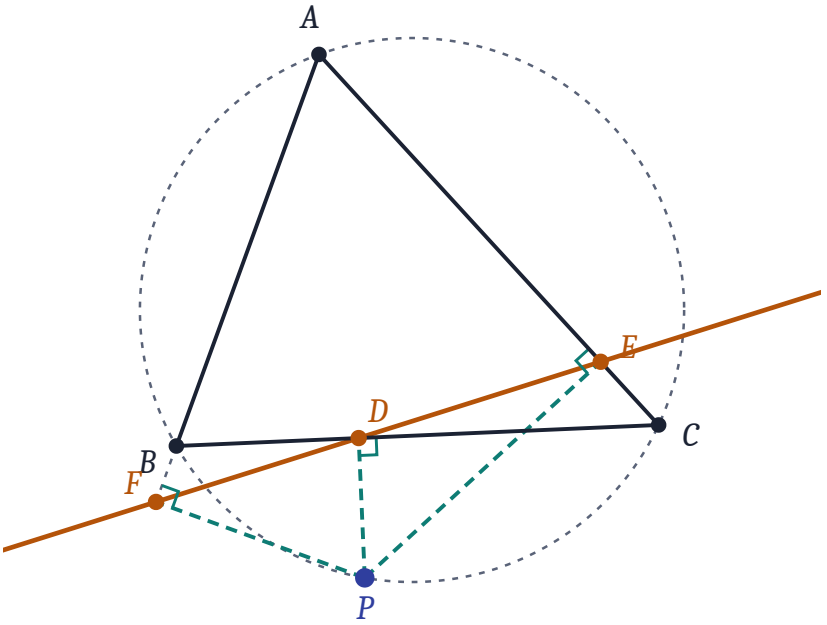
في مقالة مبرهنة منلاوس رأينا أداة لبرهان أنّ ثلاث نقاط على مستقيم واحد بواسطة النسب. هنا نرى ظاهرة استقامة من نوع آخر، تُبرهَن بالزوايا وحدها، وتربط بين ثلاثة مفاهيم من المنهاج: الأعمدة، والدائرة المحيطة، والرباعيّ الدائريّ.

المبرهنة

مبرهنة سيمسون–والاس

لتكن P نقطة في المستوى، ولتكن $D,\ E,\ F$ مواقع الأعمدة النازلة من P على المستقيمات $BC,\ CA,\ AB$ على الترتيب. النقاط D, E, F تقع على مستقيم واحد **إذا وفقط إذا** وقعت P على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

يُسمّى المستقيم عندئذٍ **مستقيم سيمسون** للنقطة P بالنسبة إلى المثلث.



النقطة P على الدائرة المحيطة. **الأعمدة** النازلة منها على المستقيمات BC, CA, AB مواقعها D, E, F، وهي على **مستقيم سيمسون**. لاحظوا أنّ F تقع على امتداد الضلع AB.

ملاحظة: كما في الرسم، يقع واحد من المواقع على الأقلّ — إلّا في حالات خاصّة — على امتداد ضلع لا على الضلع نفسه. لهذا نتحدّث عن الأعمدة على **المستقيمات** التي تقع عليها الأضلاع.

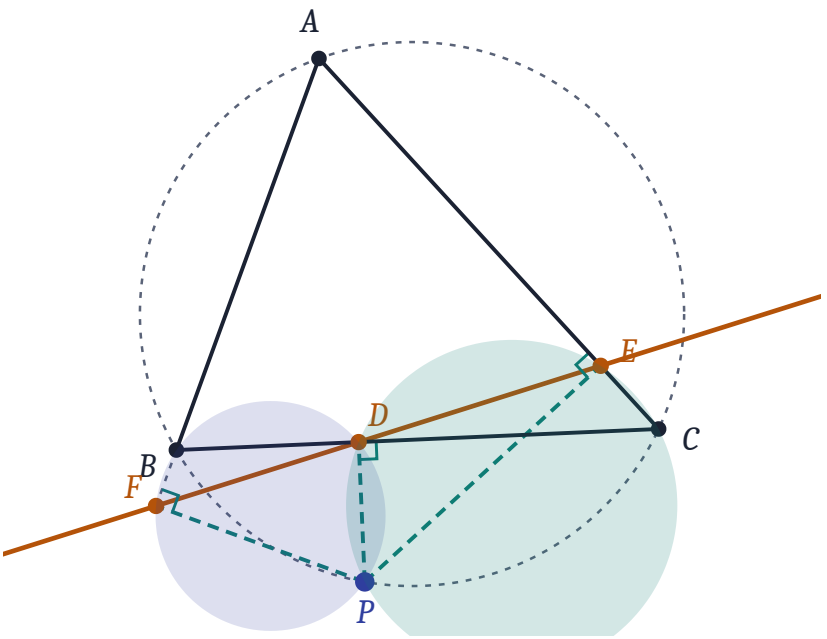
لمحة تاريخية

يحمل المستقيم اسم الرياضيّ الإسكتلنديّ روبرت سيمسون (1687–1768)، أستاذ الرياضيات في جامعة غلاسكو، المعروف خصوصًا بطبعته لكتاب «الأصول» لإقليدس، التي ظلّت أساس تعليم الهندسة في بريطانيا زمنًا طويلًا. لكن لم يُعثر في كتابات سيمسون على هذه المبرهنة.

أوّل نشر معروف لها كان عام 1799، في مقالة للرياضيّ الإسكتلنديّ ويليام والاس (1768–1843). ولذلك يفضّل كثيرون اليوم اسم «مستقيم سيمسون–والاس». وهذه ليست الحالة الوحيدة في الرياضيات التي تحمل فيها مبرهنةٌ اسمَ من لم يكتشفها!

البرهان

نبرهن الاتجاه الأوّل في الوضع المرسوم: P على القوس BC التي لا تحتوي على A، وD على الضلع BC، وE على الضلع CA، وF على امتداد AB بعد B. الأوضاع الأخرى تُبرهَن بالطريقة نفسها، مع تغيير طفيف في الزوايا.



رباعيّان دائريّان «مخفيّان»: $PFBD$ على **الدائرة التي قطرها PB**، و$PDEC$ على **الدائرة التي قطرها PC**.

1 رباعيّان دائريّان

بما أنّ $\angle PFB = \angle PDB = 90°$، فالنقطتان F وD تريان القطعة PB بزاوية قائمة، لذا P, F, B, D على دائرة قطرها PB. وبالمثل $\angle PDC = \angle PEC = 90°$، لذا P, D, E, C على دائرة قطرها PC.

2 ننقل الزوايا إلى P

في الدائرة الأولى، الزاويتان المحيطيّتان $\angle FDB$ و$\angle FPB$ تقابلان القوس نفسها FB، لذا $\angle FDB = \angle FPB$. وفي الدائرة الثانية بالطريقة نفسها: $\angle EDC = \angle EPC$.

3 نستعمل الدائرة المحيطة

في المثلث القائم PFB: $\angle FPB = 90° - \angle PBF$. وفي المثلث القائم PEC: $\angle EPC = 90° - \angle PCE$.

الرباعيّ $ABPC$ دائريّ (رؤوسه الأربعة على الدائرة المحيطة)، لذا زاويته الخارجية عند B تساوي زاويته الداخلية المقابلة عند C: $\angle PBF = \angle PCA = \angle PCE$. إذن $\angle FPB = \angle EPC$.

4 زاويتان متقابلتان بالرأس

من الخطوتين 2 و3: $\angle FDB = \angle EDC$. النقطتان B وC على جهتين متعاكستين من D على المستقيم BC، وF, E في جهتين مختلفتين من هذا المستقيم. زاويتان متساويتان كهاتين متقابلتان بالرأس، لذا الشعاعان DF وDE متعاكسان: F, D, E على مستقيم واحد. ■

والعكس؟ نسير في الخطوات بالاتجاه المعاكس. الرباعيّان $PFBD$ و$PDEC$ دائريّان لكلّ نقطة P (لم نستعمل في الخطوة 1 الدائرة المحيطة). إذا كانت D, E, F على مستقيم واحد فإنّ $\angle FDB = \angle EDC$، ومن هنا $\angle FPB = \angle EPC$، ثمّ $\angle PBF = \angle PCA$ — أي أنّ الزاوية الخارجية للرباعيّ $ABPC$ عند B تساوي الزاوية الداخلية المقابلة. وهذا شرط لأن يكون الرباعيّ دائريًّا: P على الدائرة المحيطة.

حالات خاصة وحقائق إضافية

1 P هي رأس

إذا كانت $P = A$، فموقعا العمودين على AB وAC هما A نفسها، والموقع على BC هو موقع الارتفاع. مستقيم سيمسون هو الارتفاع النازل من A.

2 P مقابلة لرأس

إذا كانت P النقطة المقابلة قطريًّا للرأس A، فإنّ $\angle ABP = \angle ACP = 90°$ (زاويتان محيطيّتان تقابلان قطرًا). إذن موقع العمود على AB هو B، وموقعه على AC هو C، ومستقيم سيمسون هو الضلع BC نفسه.

3 منتصف PH

لتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث. مستقيم سيمسون للنقطة P يمرّ دائمًا بمنتصف القطعة PH — وهذا المنتصف يقع على دائرة النقاط التسع. (سنتحقّق من ذلك في المثال.)

4 نقطتان متقابلتان قطريًّا

مستقيما سيمسون لنقطتين متقابلتين قطريًّا على الدائرة المحيطة متعامدان، ويلتقيان على دائرة النقاط التسع.

وماذا إذا لم تكن P على الدائرة؟ يمكن البرهان على أنّ مساحة المثلث DEF هي

$$S_{DEF} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2} \cdot S_{ABC},$$

حيث O وR مركز الدائرة المحيطة ونصف قطرها. المساحة صفر إذا وفقط إذا $OP = R$ — وهذه صيغة كمّية لمبرهنة سيمسون. تحقّقوا منها في المختبر!

مثال عدديّ

رؤوس المثلث $A(-3,4)$، $B(-4,-3)$، $C(4,-3)$، والنقطة $P(0,-5)$. النقاط الأربع على الدائرة $x^2+y^2=25$ (تحقّقوا!). نجد مواقع الأعمدة:

على BC: الضلع BC هو المستقيم $y=-3$، والعمود عليه من P هو $x=0$. إذن $D(0,-3)$.

على CA: المستقيم CA هو $x+y=1$. العمود عليه من P ميله 1: $y=x-5$. نحلّ: $x+(x-5)=1$، أي $x=3$. إذن $E(3,-2)$.

على AB: ميل AB هو $\frac{4-(-3)}{-3-(-4)}=7$، والمستقيم $y=7x+25$. العمود عليه من P: $y=-\frac{1}{7}x-5$.
نحلّ: $7x+25=-\frac{1}{7}x-5$، أي $\frac{50}{7}x=-30$، و$x=-4.2$. إذن $F(-4.2,\ -4.4)$.

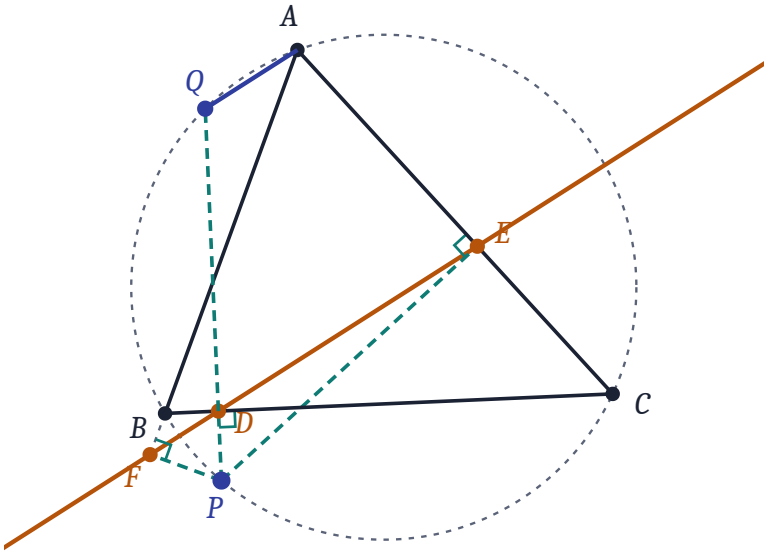
المستقيم المارّ بـ $D(0,-3)$ و$E(3,-2)$ هو $y=\frac{x}{3}-3$. نعوّض F: $\frac{-4.2}{3}-3=-1.4-3=-4.4$ ✓. النقاط الثلاث على مستقيم واحد.

والحقيقة 3؟ مركز الدائرة المحيطة هو الأصل، لذا (كما في مقالة مستقيم أويلر) $H = A + B + C = (-3, -2)$. منتصف PH هو $(-1.5,\ -3.5)$، و$\frac{-1.5}{3} - 3 = -3.5$ ✓ — إنّه على مستقيم سيمسون.

تمرين للقرّاء: موازٍ مفاجئ

تمرين

النقطة P على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، وD موقع العمود النازل منها على BC. المستقيم PD يقطع الدائرة المحيطة مرّة ثانية في النقطة Q. برهنوا أنّ AQ يوازي مستقيم سيمسون للنقطة P.



القطعة AQ توازي **مستقيم سيمسون**.

تلميح

يكفي أن تبرهنوا أنّ المستقيمين DF وQA يصنعان زاويتين متساويتين مع المستقيم PQ. استعملوا الرباعيّ الدائريّ $PFBD$ من البرهان، والزوايا المحيطيّة في الدائرة المحيطة. (ويمكن التحقّق من المثال العدديّ: هناك $Q = (0, 5)$ — ما ميل AQ؟)

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

نعمل في الوضع المرسوم (كما في البرهان: F على امتداد AB بعد B).

الرباعيّ $PFBD$ دائريّ (قطره PB)، والزاويتان المحيطيّتان $\angle PDF$ و$\angle PBF$ تقابلان القوس نفسها PF، لذا

$$\angle PDF = \angle PBF = 180^\circ - \angle PBA,$$

لأنّ F على امتداد AB. ومن جهة أخرى، في الدائرة المحيطة الزاويتان المحيطيّتان $\angle PBA$ و$\angle PQA$ تقابلان القوس نفسها PA، لذا $\angle PQA = \angle PBA$.

النقطة D بين P وQ، لذا $\angle FDQ = 180^\circ - \angle PDF = \angle PBA = \angle PQA = \angle AQD$. الزاويتان $\angle FDQ$ و$\angle AQD$ متبادلتان بالنسبة إلى القاطع DQ (النقطتان F وA في جهتين مختلفتين منه)، وهما متساويتان — لذا $DF \parallel QA$. وبما أنّ DF هو مستقيم سيمسون، انتهى البرهان. ■

وفي المثال العدديّ: PD هو المستقيم $x = 0$، فيقطع الدائرة ثانيةً في $Q(0,5)$. ميل AQ هو $\frac{5-4}{0-(-3)} = \frac{1}{3}$ — بالضبط ميل مستقيم سيمسون $y = \frac{x}{3} - 3$.

المراجع

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 2.

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover (originally 1929).

R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, 1995.

الأستاذ خالد خطيب · مستقيم سيمسون