مقالة في الهندسة

مبرهنة بطليموس

القطران والأضلاع في الرباعيّ الدائريّ

في كلّ رباعيّ تقع رؤوسه على دائرة، حاصل ضرب القطرين يساوي مجموع حاصلَي ضرب الأضلاع المتقابلة. علاقة واحدة قصيرة — ومنها تنتج مبرهنة فيثاغورس، وصيغة جيب مجموع زاويتين، والنسبة الذهبية في المخمّس المنتظم. وعليها بنى بطليموس قبل نحو ألف وتسعمئة سنة أوّل جدول مثلثاتيّ مفصّل في التاريخ.

الأستاذ خالد خطيب

نعرف عن الرباعيّ الدائريّ حقيقة مشهورة عن **الزوايا**: كلّ زاويتين متقابلتين فيه مجموعهما $180°$. مبرهنة بطليموس هي «الوجه الثاني» للرباعيّ الدائريّ: علاقة بين **الأطوال**. وكما في الزوايا، هي أيضًا صحيحة في الاتّجاهين — فهي تميّز الرباعيّات الدائريّة من بين كلّ الرباعيّات.

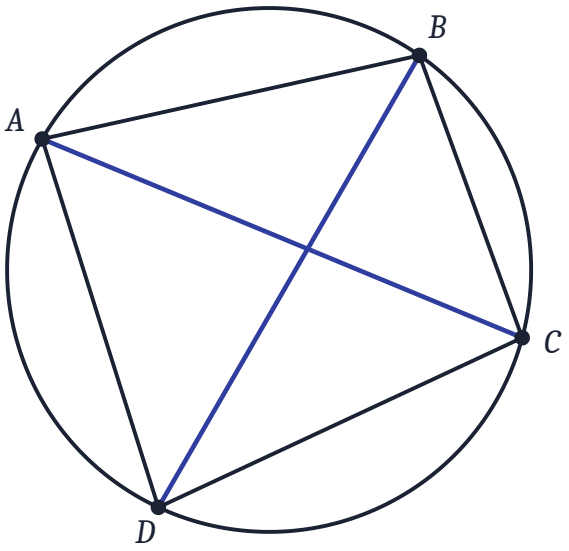
المبرهنة

مبرهنة بطليموس

إذا كان $ABCD$ رباعيًّا محدّبًا تقع رؤوسه على دائرة (بهذا الترتيب)، فإنّ

$$\boxed{AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$$

أي: حاصل ضرب القطرين يساوي مجموع حاصلَي ضرب أزواج الأضلاع المتقابلة.



رباعيّ دائريّ $ABCD$ و**قطراه** AC وBD. الأضلاع المتقابلة: AB مع CD، وAD مع BC.

متباينة بطليموس. لأيّ أربع نقاط A, B, C, D في المستوى يتحقّق $AC \cdot BD \le AB \cdot CD + AD \cdot BC$، وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كان $ABCD$ رباعيًّا دائريًّا (محدّبًا، بهذا الترتيب). أي أنّ مبرهنة بطليموس هي حالة المساواة في متباينة عامّة.

لمحة تاريخية

كلاوديوس بطليموس (نحو 100–170 م) عالم فلك ورياضيّات وجغرافيا عاش في الإسكندرية. أعظم كتبه في الفلك سمّاه «التأليف الرياضيّ» (Mathematike Syntaxis)، لكنّه اشتهر باسمه العربيّ: «**المجسطي**» — من الكلمة اليونانية «ميغيستي» (الأعظم) مع أداة التعريف العربية. وبهذا الاسم العربيّ انتقل الكتاب لاحقًا إلى أوروبا (Almagest).

كان الفلك يحتاج إلى حساب أطوال الأوتار في الدائرة لكلّ زاوية مركزية — وهذا ما نسمّيه اليوم «جيب الزاوية» (طول الوتر يساوي ضعف جيب نصف الزاوية المركزية مضروبًا في نصف القطر). في الكتاب الأوّل من «المجسطي» بنى بطليموس جدولًا لأطوال الأوتار من نصف درجة إلى $180°$ بقفزات من نصف درجة. والأداة المركزية في بنائه هي المبرهنة التي تحمل اسمه: منها استنتج طول وتر مجموع قوسين وفرقهما — وهي بلغتنا صيغتا جيب مجموع زاويتين وفرقهما.

تُرجم «المجسطي» إلى العربية أكثر من مرّة في بغداد في القرن التاسع، منها ترجمة الحجّاج بن مطر، وترجمة إسحاق بن حنين التي أصلحها ثابت بن قرّة. وعلى أساسه طوّر علماء الفلك العرب حساب المثلثات وأدخلوا الجيب بدل الوتر.

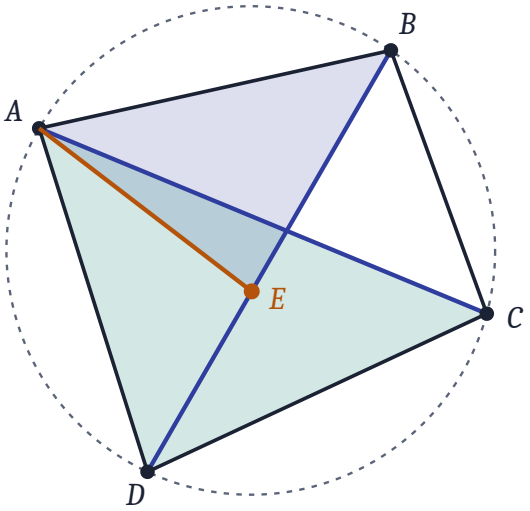
برهان بالمثلثات المتشابهة

الفكرة: نقسم القطر BD إلى جزأين بنقطة ذكيّة E، بحيث يرتبط كلّ جزء بحاصل ضرب واحد من الطرف الأيمن.

1 النقطة الذكيّة

نختار النقطة E على القطر BD بحيث $\angle BAE = \angle CAD$. (نرسم من A شعاعًا يصنع مع AB زاوية تساوي $\angle CAD$.)

2 الزوج الأوّل



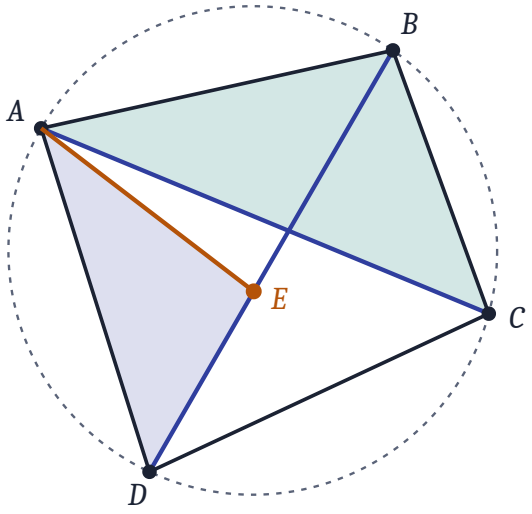
المثلث ABE **بالأزرق الفاتح** والمثلث ACD **بالأخضر الفاتح**: متشابهان.

في المثلثين ABE وACD: $\angle BAE = \angle CAD$ (هكذا اخترنا E)،

و$\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD$ (زاويتان محيطيتان تقابلان القوس AD). إذن المثلثان متشابهان، ومن هنا

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \quad \Longrightarrow \quad AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

3 الزوج الثاني



المثلث ADE **بالأزرق الفاتح** والمثلث ACB **بالأخضر الفاتح**: متشابهان أيضًا.

نضيف الزاوية $\angle EAC$ إلى طرفَي المساواة $\angle BAE = \angle CAD$، فنحصل على $\angle BAC = \angle EAD$. وأيضًا $\angle ADE = \angle ADB = \angle ACB$ (تقابلان القوس AB). إذن $\triangle ADE \sim \triangle ACB$، ومن هنا

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \quad \Longrightarrow \quad AD \cdot BC = AC \cdot DE.$$

4 نجمع

نجمع المساواتين:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot DE = AC\,(BE + DE) = AC \cdot BD.$$

ومن أين تأتي المتباينة؟

إذا لم يكن الرباعيّ دائريًّا، يمكننا أن نبني النقطة E بطريقة أخرى: نبني المثلث ABE شبيهًا بالمثلث ACD (بالزوايا نفسها عند A وعند B). الحساب في الخطوتين 2 و3 يبقى كما هو تقريبًا، ويعطي $BE = \frac{AB \cdot CD}{AC}$ و$DE = \frac{AD \cdot BC}{AC}$. لكنّ E الآن لا تقع بالضرورة على BD، لذا لا نستطيع أن نكتب $BE + DE = BD$. ما نعرفه هو متباينة المثلث:

$$BD \le BE + DE = \frac{AB \cdot CD + AD \cdot BC}{AC}.$$

وهذه بالضبط متباينة بطليموس. تتحقّق المساواة فقط إذا وقعت E على القطعة BD، أي إذا $\angle ABD = \angle ABE = \angle ACD$ — وهذا شرط كون الرباعيّ دائريًّا.

ثلاث نتائج من مبرهنة واحدة

1 مبرهنة فيثاغورس

المستطيل رباعيّ دائريّ. إذا كان طولا ضلعَيه a وb وطول قطره d، فإنّ مبرهنة بطليموس تعطي $d \cdot d = a \cdot a + b \cdot b$، أي

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

2 جيب مجموع زاويتين

نأخذ دائرة قطرها $AC = 1$، والنقطتين B وD على جهتين مختلفتين من القطر، بحيث $\angle BAC = \alpha$ و$\angle CAD = \beta$. الزاويتان عند B وعند D قائمتان (تقابلان القطر)، لذا

$$BC = \sin\alpha, \quad AB = \cos\alpha, \quad CD = \sin\beta, \quad AD = \cos\beta.$$

والوتر BD يقابل الزاوية المحيطية $\angle BAD = \alpha + \beta$، لذا وفق قانون الجيوب في دائرة قطرها 1: $BD = \sin(\alpha + \beta)$. نعوّض في مبرهنة بطليموس $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

هذه بالضبط الطريقة التي حسب بها بطليموس — بلغة الأوتار — جدوله الفلكيّ.

3 نقطة على قوس المثلث المتساوي الأضلاع

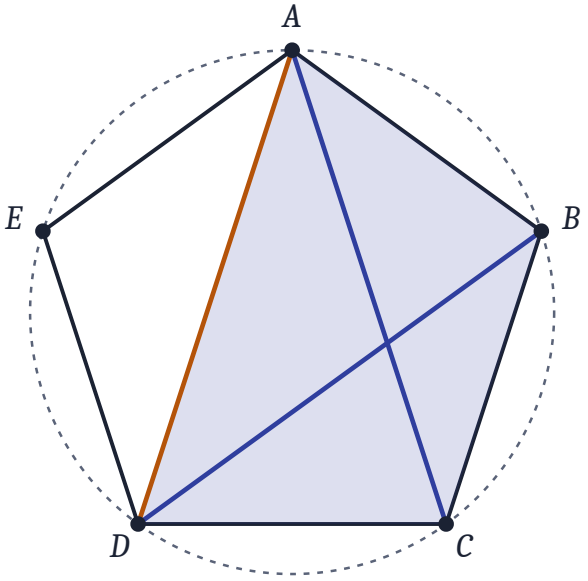
ليكن ABC مثلثًا متساوي الأضلاع، وP نقطة على القوس BC (الذي لا يحتوي على A) من الدائرة المحيطة به. الرباعيّ $ABPC$ دائريّ، وطول كلّ ضلع في المثلث s. وفق بطليموس: $AP \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot BP$، أي $AP \cdot s = s \cdot PC + s \cdot PB$. نقسم على s:

$$PA = PB + PC.$$

البعد عن الرأس البعيد يساوي مجموع البعدين عن الرأسين القريبين — لكلّ نقطة على القوس.

مثال عددي: النسبة الذهبية في المخمّس

في مخمّس منتظم طول ضلعه 1، ما طول القطر d؟



الرباعيّ $ABCD$ (بالأزرق الفاتح) دائريّ: أضلاعه $AB = BC = CD = 1$ و$AD = d$، وقطراه $AC = BD = d$.

الحلّ. رؤوس المخمّس المنتظم تقع على دائرة، لذا الرباعيّ $ABCD$ المكوّن من أربعة رؤوس متتالية دائريّ. أضلاعه $AB = BC = CD = 1$، وضلعه الرابع AD قطر في المخمّس، أي $AD = d$. وقطراه AC وBD قطران في المخمّس أيضًا. وفق بطليموس:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad \Longrightarrow \quad d \cdot d = 1 \cdot 1 + d \cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad d^2 - d - 1 =$$

الحلّ الموجب للمعادلة التربيعية:

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

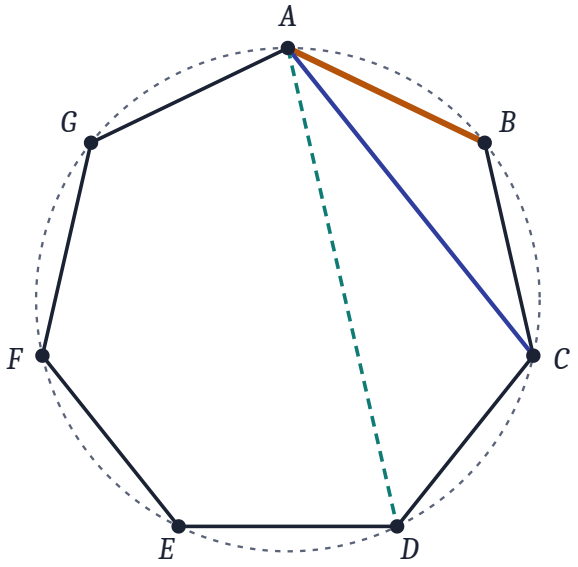
وهذا هو **النسبة الذهبية** φ. أي أنّ النسبة بين القطر والضلع في كلّ مخمّس منتظم هي النسبة الذهبية — وحصلنا على ذلك بسطر واحد.

تمرين للقرّاء: السباعيّ المنتظم

تمرين

ليكن $ABCDEFG$ سباعيًّا منتظمًا. نرمز $a = AB$ (الضلع)، $b = AC$ (القطر القصير)، $c = AD$ (القطر الطويل). برهنوا أنّ

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$



من الرأس A: **الضلع** a، **القطر القصير** b، و**القطر الطويل** c.

تلميح

في السباعيّ المنتظم يوجد ثلاثة أطوال فقط بين رأسين: a, b, c. اختاروا رباعيًّا دائريًّا من أربعة رؤوس بحيث يظهر الطول a مرّتين، والطولان b وc في أماكن مناسبة. جرّبوا الرباعيّ $ACDE$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

بين رأسين في السباعيّ المنتظم يوجد «فارق» من خطوة واحدة أو خطوتين أو ثلاث خطوات (الفارق 4 يساوي 3 من الجهة الأخرى، وهكذا)، والأطوال المقابلة هي a, b, c.

في الرباعيّ الدائريّ $ACDE$:

الأضلاع: $AC = b$، $CD = a$، $DE = a$، وEA فارقها 3 خطوات $(A \to G \to F \to E)$، لذا $EA = c$.

القطران: $AD = c$، و$CE = b$.

وفق مبرهنة بطليموس $AD \cdot CE = AC \cdot DE + AE \cdot CD$:

$$c \cdot b = b \cdot a + c \cdot a.$$

نقسم الطرفين على abc:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}. \qquad \blacksquare$$

تحقّق عدديّ: في سباعيّ منتظم نصف قطر دائرته 1، $a = 2\sin\frac{\pi}{7} \approx 0.868$، $b = 2\sin\frac{2\pi}{7} \approx 1.564$، $c = 2\sin\frac{3\pi}{7} \approx 1.950$، و$\frac{1}{a} \approx 1.152 = 0.639 + 0.513 \approx \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

المراجع

G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Duckworth, London, 1984 (Book I, ch. 10).

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 2.
