مقالة في الهندسة

مبرهنة بابوس

ستّ نقاط على مستقيمين، وثلاث نقاط على مستقيم ثالث

نأخذ ثلاث نقاط على مستقيم، وثلاث نقاط على مستقيم آخر، ونصل بينها «بالتقاطع». تظهر ثلاث نقاط تقاطع جديدة — وهي، مهما اخترنا النقاط الستّ، تقع دائمًا على مستقيم واحد. لا أطوال في نصّ المبرهنة ولا زوايا: فقط نقاط ومستقيمات. ومع ذلك فهي من أعمق المبرهنات في الهندسة.

الأستاذ خالد خطيب

معظم المبرهنات التي نتعلّمها في المدرسة تتحدّث عن قياسات: أطوال قطع، زوايا، مساحات. مبرهنة بابوس من نوع آخر: إنّها مبرهنة وقوع — تقول فقط أيّ نقاط تقع على أيّ مستقيمات. يمكن رسمها بمسطرة وحدها، بلا فرجار ولا مقياس. وهذا بالذات ما يجعلها مدهشة: لا يوجد أيّ سبب «ظاهر» يجعل النقاط الثلاث الجديدة تصطفّ على مستقيم واحد.

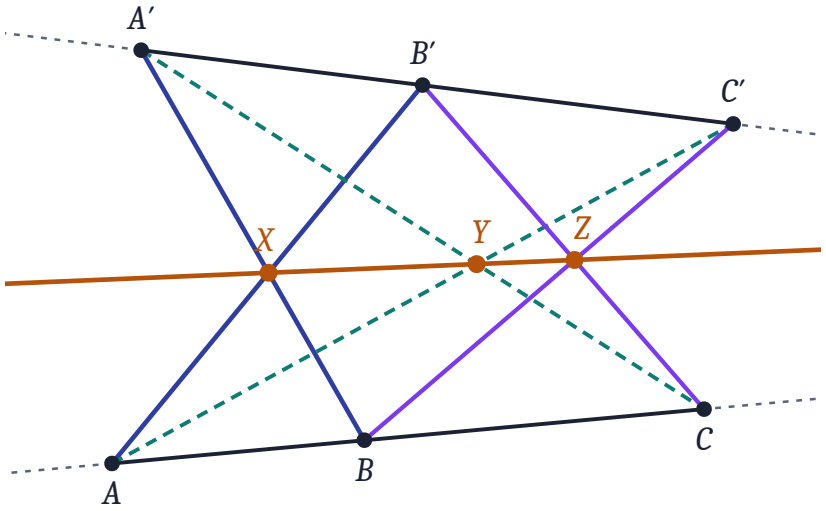
المبرهنة

مبرهنة بابوس

لتكن $A,\ B,\ C$ ثلاث نقاط على مستقيم ℓ، و$A',\ B',\ C'$ ثلاث نقاط على مستقيم آخر ℓ'. نعرّف ثلاث نقاط تقاطع:

$$X = AB' \cap A'B, \qquad Y = AC' \cap A'C, \qquad Z = BC' \cap B'C.$$

عندئذٍ تقع النقاط $X,\ Y,\ Z$ على **مستقيم واحد** (يُسمّى مستقيم بابوس).



كلّ زوج من «الخطوط المتقاطعة» بلون: **بالأزرق** AB' و$A'B$، **بالأخضر** AC' و$A'C$، **بالبنفسجي** BC' و$B'C$. نقاط تقاطعها X, Y, Z تقع على **مستقيم بابوس**.

طريقة سهلة لتذكّر القاعدة: في كلّ نقطة تقاطع نأخذ زوجًا من الحروف، ونصل «الحرف العاديّ» من الأوّل بـ«الحرف ذي الشَّرطة» من الثاني، وبالعكس. مثلًا للزوج $\{A, B\}$: المستقيم AB' والمستقيم $A'B$. الأزواج الثلاثة $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ تعطي النقاط الثلاث X, Y, Z.

ملاحظة: إذا قرأنا النقاط بالترتيب $A \to B' \to C \to A' \to B \to C' \to A$ حصلنا على «سداسيّ» تتناوب رؤوسه بين المستقيمين. عندئذٍ X, Y, Z هي نقاط تقاطع أزواج الأضلاع المتقابلة في هذا السداسيّ. لذلك تُسمّى المبرهنة أحيانًا «مبرهنة سداسيّ بابوس».

لمحة تاريخية

بابوس الإسكندرانيّ من آخر كبار الرياضيين في الإسكندرية القديمة، عاش في النصف الأوّل من القرن الرابع الميلاديّ. أهمّ أعماله «المجموعة» (Synagoge)، وهي ثمانية كتب جمع فيها نتائج من سبقوه وشرحها وأضاف إليها. وكثير ممّا نعرفه اليوم عن كتب يونانية ضاعت، وصلنا من خلال شروح بابوس عليها.

ظهرت المبرهنة في الكتاب السابع من «المجموعة»، كواحدة من «المقدّمات» (المبرهنات المساعدة) لكتاب إقليدس «المسائل» (Porisms)، وهو كتاب ضائع لا نعرف عنه إلّا ما رواه بابوس.

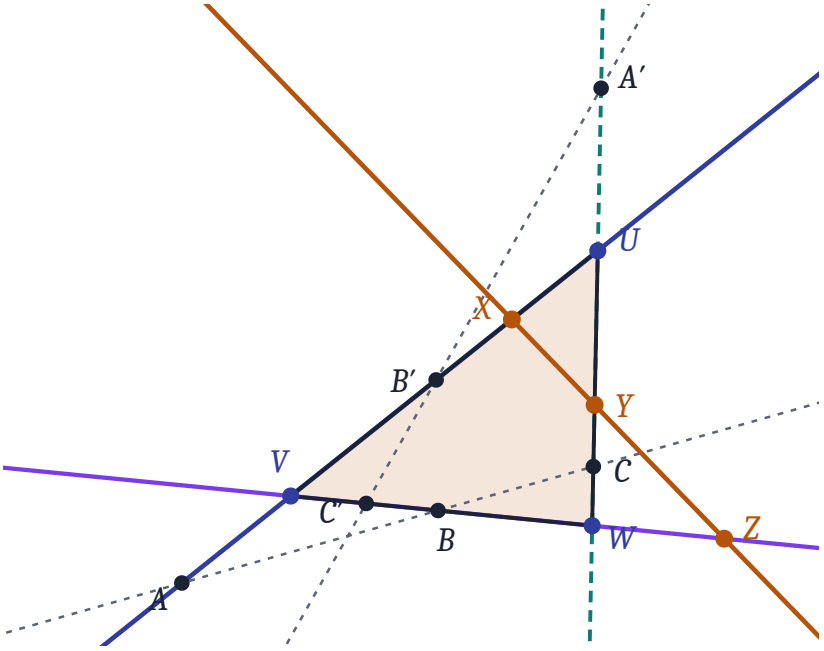
بعد نحو ثلاثة عشر قرنًا، عام 1640، برهن الشابّ بليز باسكال (وهو في السادسة عشرة) تعميمًا واسعًا لها: ستّ نقاط على دائرة — أو على أيّ قطع مخروطيّ — بدل المستقيمين. مبرهنة بابوس هي الحالة التي «ينهار» فيها القطع المخروطيّ إلى مستقيمين. وفي عام 1899 بيّن دافيد هيلبرت، في كتابه «أسس الهندسة»، أنّ مبرهنة بابوس مرتبطة بقانون جبريّ بسيط: $ab = ba$. فإذا بنينا «حسابًا» من نقاط ومستقيمات، فإنّ صحّة مبرهنة بابوس هي بالضبط ما يضمن أنّ الضرب فيه تبديليّ.

برهان بمبرهنة منلاوس

نستعمل مبرهنة منلاوس بصيغتها ذات الإشارة: إذا قطع مستقيمٌ المستقيماتِ التي تقع عليها أضلاع المثلث UVW في النقاط $P \in VW$، $Q \in WU$، $R \in UV$، فإنّ

$$\frac{\overline{VP}}{\overline{PW}} \cdot \frac{\overline{WQ}}{\overline{QU}} \cdot \frac{\overline{UR}}{\overline{RV}} = -1,$$

حيث الخطّ فوق القطعة يعني أنّ للنسبة إشارة (سالبة إذا وقعت النقطة خارج الضلع). والعكس أيضًا صحيح: إذا كان حاصل الضرب -1 فالنقاط الثلاث على مستقيم واحد. الفكرة: نختار مثلثًا مناسبًا، ونطبّق عليه مبرهنة منلاوس خمس مرّات.



المثلث المساعد UVW (بالبرتقاليّ الفاتح) تحصره ثلاثة من الخطوط المتقاطعة: AB' وBC' وCA'. على أضلاعه تقع النقاط الستّ، والنقاط X, Y, Z. لم نرسم بقيّة الخطوط كي لا يزدحم الشكل.

1 المثلث المساعد

نأخذ المستقيمات الثلاثة AB' وBC' وCA'، ونسمّي نقاط تقاطعها:

$$U = CA' \cap AB', \qquad V = AB' \cap BC', \qquad W = BC' \cap CA'.$$

إذن الضلع UV يقع على AB'، والضلع VW على BC'، والضلع WU على CA'. لاحظوا أنّ X تقع على AB' (أي على UV)، وZ على BC' (أي على VW)، وY على CA' (أي على WU).

2 خمسة قواطع

كلّ واحد من المستقيمات الخمسة التالية يقطع المستقيمات الثلاثة UV, WU, VW — نكتب في كلّ مرّة النقاط بهذا الترتيب، ثم المساواة وفق منلاوس:

القاطع	على VW	على WU	على UV
$A'B$ (يمرّ بـ X)	B	A'	X
AC' (يمرّ بـ Y)	C'	Y	A
$B'C$ (يمرّ بـ Z)	Z	C	B'
ℓ (يمرّ بـ A, B, C)	B	C	A
ℓ' (يمرّ بـ A', B', C')	C'	A'	B'

فنحصل على خمس مساواة (لاختصار الكتابة حذفنا الخطوط فوق القطع، لكنّ كلّ النسب ذات إشارة):

$$(1)\quad \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WA'}{A'U}\cdot\frac{UX}{XV} = -1 \qquad (2)\quad \frac{VC'}{C'W}\cdot\frac{WY}{YU}\cdot\frac{UA}{AV} = -1$$

$$(3)\quad \frac{VZ}{ZW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UB'}{B'V} = -1 \qquad (4)\quad \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UA}{AV} = -1$$

$$(5)\quad \frac{VC'}{C'W}\cdot\frac{WA'}{A'U}\cdot\frac{UB'}{B'V} = -1$$

3 نضرب ونقسم

نضرب المساواة (1) و(2) و(3)، ونقسم على حاصل ضرب (4) و(5). انظروا ماذا يحدث: كلّ نسبة تتعلّق بالنقاط الستّ الأصلية تظهر مرّة واحدة في البسط ومرّة واحدة في المقام، فتختصر:

$\frac{VB}{BW}$ في (1) وفي (4)؛ $\frac{WA'}{A'U}$ في (1) وفي (5)؛
$\frac{VC'}{C'W}$ في (2) وفي (5)؛ $\frac{UA}{AV}$ في (2) وفي (4)؛
$\frac{WC}{CU}$ في (3) وفي (4)؛ $\frac{UB'}{B'V}$ في (3) وفي (5).

تبقى فقط النسب الثلاث التي فيها X, Y, Z:

$$\frac{VZ}{ZW} \cdot \frac{WY}{YU} \cdot \frac{UX}{XV} = \frac{(-1)(-1)(-1)}{(-1)(-1)} = -1.$$

4 عكس منلاوس

النقاط $Z \in VW$ و$Y \in WU$ و$X \in UV$ تحقّق شرط منلاوس، لذا فهي على مستقيم واحد. ■

البرهان «محاسبيّ» بالكامل: لم نستعمل أيّ زاوية ولا أيّ طول محدّد، فقط حقيقة أنّ ستّ نسب تختصر. وهذا يتّفق مع روح المبرهنة: مبرهنة عن نقاط ومستقيمات فقط.

عندما يصبح التقاطع توازيًا

ماذا لو كان $A'B \parallel AB'$؟ عندئذٍ لا توجد نقطة X — أو، بلغة الهندسة الإسقاطية، X هي «نقطة في اللانهاية» في اتّجاه هذين المستقيمين. تبقى المبرهنة صحيحة بصيغة معدّلة: مستقيم بابوس يمرّ بـ Y وZ ويوازي AB'. وإذا كان زوجان من الأزواج الثلاثة متوازيين، فإنّ الزوج الثالث متوازٍ أيضًا — هذه حالة خاصّة مدهشة بحدّ ذاتها، وهي موضوع التمرين في آخر المقالة.

وماذا لو كان المستقيمان ℓ وℓ' متوازيين؟ المبرهنة صحيحة في هذه الحالة أيضًا، والبرهان بمبرهنة منلاوس يبقى كما هو. جرّبوا ذلك في المختبر: اجعلوا المستقيمين شبه متوازيين ولاحظوا أنّ X, Y, Z لا تزال على مستقيم واحد.

مثال عددي

في هيئة محاور نأخذ على محور x النقاط $A(1,0),\ B(2,0),\ C(4,0)$، وعلى محور y النقاط $A'(0,1),\ B'(0,3),\ C'(0,6)$. أسهل طريقة لكتابة معادلة مستقيم يقطع المحورين في $(p,0)$ و$(0,q)$ هي **صورة المقطعين**: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

X: المستقيم AB' هو $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}=1$، والمستقيم $A'B$ هو $\frac{x}{2}+y=1$. من الثانية $x=2-2y$، نعوّض: $2-2y+\frac{y}{3}=1$، أي $y=\frac{3}{5}$ و$x=\frac{4}{5}$. إذن $X\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Y: المستقيم AC' هو $\frac{x}{1}+\frac{y}{6}=1$، والمستقيم $A'C$ هو $\frac{x}{4}+y=1$. بالطريقة نفسها: $Y\left(\frac{20}{23},\frac{18}{23}\right)$.

Z: المستقيم BC' هو $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$، أي $3x+y=6$، والمستقيم $B'C$ هو $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$، أي $3x+4y=12$. بالطرح $3y=6$، إذن $Z\left(\frac{4}{3},2\right)$.

ميل XZ: $\dfrac{2-\frac{3}{5}}{\frac{4}{3}-\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{21}{8}$، وميل XY: $\dfrac{\frac{18}{23}-\frac{3}{5}}{\frac{20}{23}-\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{21}{115}}{\frac{8}{115}}=\dfrac{21}{8}$. الميلان متساويان، إذن X,Y,Z على مستقيم واحد معادلته

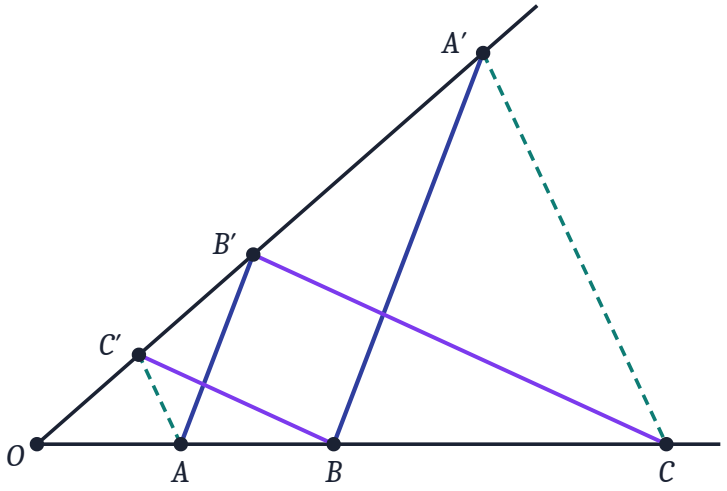
$$y=\frac{21}{8}x-\frac{3}{2}.$$

كان يمكن أن تخرج الأعداد «قبيحة» تمامًا — ومع ذلك يتساوى الميلان بالضبط. هذا ما تضمنه المبرهنة.

تمرين للقرّاء: بابوس مع خطوط متوازية

تمرين

المستقيمان ℓ وℓ' يتقاطعان في النقطة O. النقاط A,B,C على ℓ والنقاط A',B',C' على ℓ' (كلّها مختلفة عن O). معطى أنّ $AB'\parallel A'B$ وأنّ $AC'\parallel A'C$. برهنوا أنّ $BC'\parallel B'C$.



كلّ زوج متوازٍ بلون واحد. إذا كان **الأزرقان** متوازيين و**الأخضران** متوازيين، فإنّ **البنفسجيّين** متوازيان أيضًا.

تلميح

استعملوا مبرهنة تالس (القطع المتناسبة) في الزاوية التي رأسها O. ماذا يقول التوازي $AB' \parallel A'B$ عن حاصل الضرب $OA \cdot OA'$؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

المستقيمان AB' وBA' متوازيان، فوفق مبرهنة تالس في الزاوية التي رأسها O:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad \Longrightarrow \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB'.$$

وبالطريقة نفسها من $AC' \parallel A'C$:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OA'} \quad \Longrightarrow \quad OA \cdot OA' = OC \cdot OC'.$$

إذن $OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$، أي $\frac{OB}{OC} = \frac{OC'}{OB'}$. ووفق عكس مبرهنة تالس ينتج $BC' \parallel B'C$. ■

(دقّة صغيرة: يجب الانتباه أيضًا إلى جهة النقاط بالنسبة إلى O؛ إذا قِسنا الأطوال بإشارة على كلّ مستقيم، يبقى البرهان كما هو.)

هذه «مبرهنة بابوس الصغرى»: الحالة التي تذهب فيها نقطتا التقاطع X وY إلى اللانهاية. ومستقيم بابوس الذي يمرّ بهما هو «المستقيم في اللانهاية» — لذا يجب أن تكون Z أيضًا في اللانهاية، أي $BC' \parallel B'C$. لاحظوا كيف ظهر هنا حاصل الضرب $OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$: هذا هو قانون تبديل الضرب الذي تحدّث عنه هيلبرت، مختبئًا في الشكل.

المراجع

Pappus of Alexandria, *Book 7 of the Collection*, ed. and trans. A. Jones, Springer, 1986.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899 (Eng. trans. *The Foundations of Geometry*).

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 3.
