مقالة في الهندسة

دائرة النقاط التسع

تسع نقاط، ودائرة واحدة، ومبرهنة فويرباخ

ثلاث نقاط ليست على مستقيم واحد تمرّ بها دائمًا دائرة. أمّا أن تقع أربع نقاط على دائرة واحدة فهذا يحتاج إلى سبب. ففي كلّ مثلث توجد تسع نقاط تُعرَّف بثلاث طرق مختلفة — ومع ذلك تقع كلّها على دائرة واحدة. وكأنّ هذا لا يكفي، فهذه الدائرة تمسّ الدائرة الداخلية للمثلث والدوائر الخارجية الثلاث.

الأستاذ خالد خطيب

لنأخذ مثلثًا ABC، ولتكن H نقطة تلاقي ارتفاعاته. نرسم ثلاث مجموعات من النقاط، ثلاث نقاط في كلّ مجموعة:

منتصفات الأضلاع M_a, M_b, M_c (منتصفات BC, CA, AB).
مواقع الارتفاعات F_a, F_b, F_c — النقاط التي تلتقي فيها الارتفاعات بالأضلاع (أو بامتداداتها).
منتصفات القطع AH, BH, CH، ونرمز إليها بـ E_a, E_b, E_c (تُسمّى أحيانًا «نقاط أويلر»).

المجموعة الأولى تتعلّق بالأضلاع فقط، والثانية بالتعامد، والثالثة بنقطة داخلية خاصّة. لا يوجد سبب ظاهر لأن تجتمع.

المبرهنة

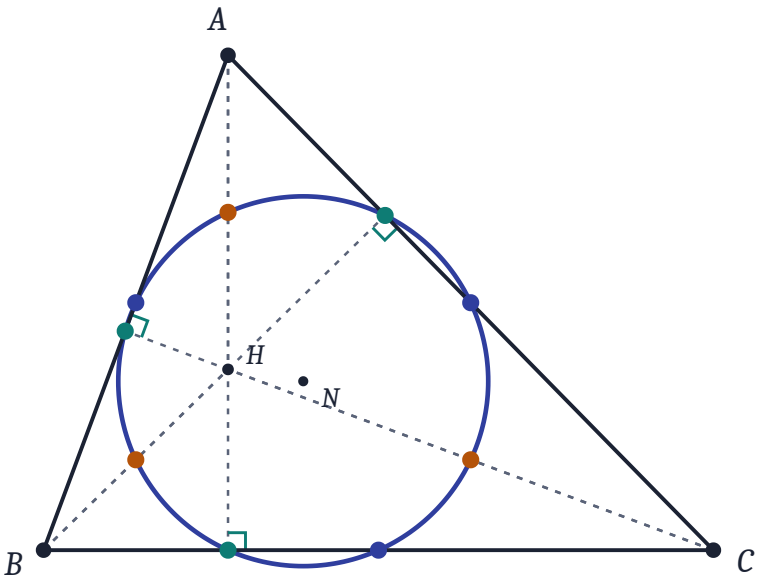
دائرة النقاط التسع

في كلّ مثلث، تقع النقاط التسع

$$M_a, M_b, M_c, \qquad F_a, F_b, F_c, \qquad E_a, E_b, E_c$$

على دائرة واحدة. مركزها N هو منتصف القطعة OH (حيث O مركز الدائرة المحيطة)، ونصف قطرها ρ يساوي نصف نصف قطر الدائرة المحيطة R:

$$\boxed{\rho = \frac{R}{2}}$$



بالأزرق — منتصفات الأضلاع؛ **بالأخضر** — مواقع الارتفاعات؛ **بالبرتقالي** — منتصفات القطع من الرؤوس إلى H. التسع كلّها على الدائرة الزرقاء التي مركزها N.

ملاحظة: بما أنّ N منتصف OH، فهي تقع على مستقيم أويلر للمثلث، بين مركز الدائرة المحيطة ونقطة تلاقي الارتفاعات. وفي المثلث المتساوي الأضلاع تنطبق مواقع الارتفاعات على منتصفات الأضلاع، فيبقى ستّ نقاط مختلفة فقط — والدائرة هي الدائرة الداخلية نفسها.

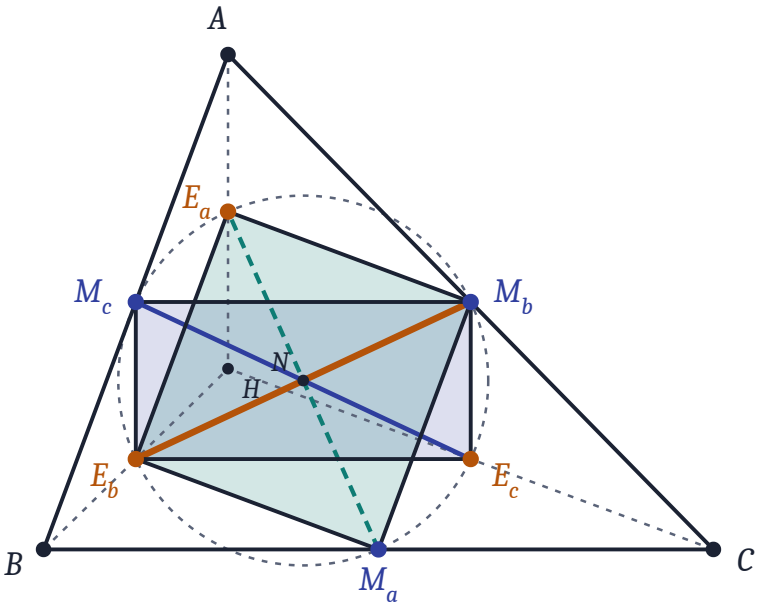
لمحة تاريخية

نُشرت أوّل برهنة كاملة لوقوع النقاط التسع على دائرة واحدة عام 1821، في بحث مشترك للرياضيّين الفرنسيّين شارل جوليان بريانشون وجان فيكتور بونسليه، في مجلّة Annales de Mathématiques التي كان يحرّرها جوزيف جيرغون.

وبعد سنة واحدة فقط، عام 1822، نشر المعلّم الألمانيّ الشابّ كارل فيلهلم فويرباخ (1800–1834) كتيّبًا عن «خصائص بعض النقاط المميّزة في المثلث المستقيم الأضلاع»، برهن فيه من جديد أنّ منتصفات الأضلاع ومواقع الارتفاعات تقع على دائرة واحدة، وأضاف اكتشافًا مذهلًا: هذه الدائرة تمسّ الدائرة الداخلية والدوائر الخارجية الثلاث. لذلك تُسمّى الدائرة في البلدان الناطقة بالألمانية «دائرة فويرباخ». (وكارل فيلهلم هو شقيق الفيلسوف المعروف لودفيغ فويرباخ.)

برهان بمستطيلين

نحتاج إلى أداتين فقط: **القطعة المتوسطة في المثلث** (القطعة التي تصل منتصفَي ضلعين توازي الضلع الثالث وطولها نصفه)، والحقيقة أنّ **قطرَي المستطيل متساويان وينصّف كلّ منهما الآخر**، لذا تقع رؤوس المستطيل الأربعة على دائرة قطرها أحد القطرين.



المستطيل $M_bM_cE_bE_c$ والمستطيل $M_aM_bE_aE_b$. لهما قطر مشترك: M_bE_b.

1 المستطيل الأوّل

في المثلث ABC: $M_bM_c \parallel BC$. وفي المثلث HBC (حيث E_b, E_c منتصفا HB, HC): $E_bE_c \parallel BC$. وفي المثلث ABH: $M_cE_b \parallel AH$، وفي المثلث ACH: $M_bE_c \parallel AH$.

لكنّ $AH \perp BC$ (لأنّ AH جزء من الارتفاع). إذن الرباعيّ $M_bM_cE_bE_c$ ضلعان متقابلان فيه يوازيان BC والضلعان الآخران يوازيان AH — فهو **مستطيل**، وقطراه M_bE_b وM_cE_c.

2 المستطيل الثاني

بالطريقة نفسها، مع الضلع AB والقطعة CH العمودية عليه: $E_aE_b \parallel AB \parallel M_aM_b$، و$M_aE_b \parallel CH \parallel M_bE_a$. إذن $M_aM_bE_aE_b$ مستطيل أيضًا، وقطراه M_aE_a وM_bE_b.

3 ستّ نقاط على دائرة

للمستطيلين قطر مشترك: M_bE_b. لتكن ω الدائرة التي قطرها M_bE_b. رؤوس المستطيل الأوّل الأربعة عليها، وكذلك رؤوس المستطيل الثاني. إذن النقاط الستّ $M_a, M_b, M_c, E_a, E_b, E_c$ على ω، والقطع الثلاث M_aE_a, M_bE_b, M_cE_c كلّها أقطار فيها.

4 مواقع الارتفاعات

الموقع F_a يقع على BC (الذي عليه M_a) وعلى الارتفاع AH (الذي عليه E_a)، والمستقيمان متعامدان. لذا $\angle M_aF_aE_a = 90^\circ$: النقطة F_a ترى القطر M_aE_a بزاوية قائمة، فهي على ω. (إذا انطبقت F_a على M_a فلا شيء لنبرهنه.) وبالمثل F_b وF_c. إذن النقاط التسع كلّها على ω. ■

المركز ونصف القطر

المركز N هو منتصف القطر M_aE_a. في مقالة مستقيم أويلر برهنّا أنّ $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OM_a}$. لذا $\overrightarrow{AE_a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OM_a}$، والرباعيّ AE_aM_aO متوازي أضلاع. ينتج أمران:

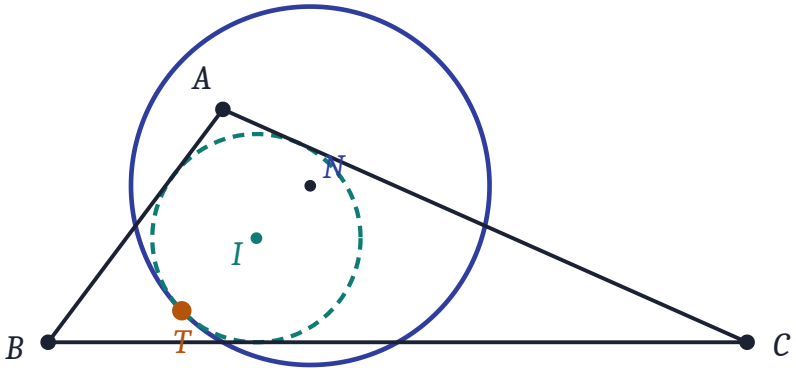
الضلعان المتقابلان E_aM_a وAO متساويان: $E_aM_a = AO = R$، أي أنّ قطر الدائرة R ونصف قطرها $\frac{R}{2}$.

بطريقة المتّجهات (الأصل في O، و$\overrightarrow{OH} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$):
$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE_a} + \overrightarrow{OM_a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{h}}{2} + \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) = \frac{\vec{h}}{2}$، أي أنّ N منتصف OH.

مبرهنة فويرباخ

مبرهنة فويرباخ (1822)

دائرة النقاط التسع تمسّ الدائرة الداخلية للمثلث من الداخل، وتمسّ كلّ واحدة من الدوائر الخارجية الثلاث من الخارج.



دائرة النقاط التسع و**الدائرة الداخلية** تتماسّان في النقطة T، وتُسمّى «نقطة فويرباخ».

البرهان الكامل أطول من أن يُعرض هنا، لكن يمكن التحقّق من المبرهنة حسابيًّا: تتماسّ دائرتان من الداخل إذا كان البعد بين مركزيهما يساوي الفرق بين نصفَي القطرين. أي أنّ مبرهنة فويرباخ تعني $NI = \frac{R}{2} - r$، حيث I وr مركز الدائرة الداخلية ونصف قطرها. سنرى ذلك في المثال العدديّ. والمعنى الهندسيّ مدهش: الدائرة الداخلية تقع كلّها داخل دائرة النقاط التسع، وتلمسها في نقطة واحدة بالضبط — في كلّ مثلث.

مثال عدديّ

في المثلث $A(0,0)$، $B(6,0)$، $C(2,4)$ وجدنا في مقالة مستقيم أويلر أنّ $O(3,1)$ و$H(2,2)$. إذن

$$N=\left(\frac{3+2}{2},\frac{1+2}{2}\right)=(2.5,\ 1.5),\qquad R=OA=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\qquad \left(\frac{R}{2}\right)^2=$$

نحسب النقاط التسع ونتحقّق أنّ مربّع بعد كلّ منها عن N يساوي 2.5:

النقطة	الإحداثيّات	$(x-2.5)^2+(y-1.5)^2$
M_a	$(4,\ 2)$	$2.25+0.25=2.5$
M_b	$(1,\ 2)$	$2.25+0.25=2.5$
M_c	$(3,\ 0)$	$0.25+2.25=2.5$
F_a	$(3,\ 3)$	$0.25+2.25=2.5$
F_b	$(1.2,\ 2.4)$	$1.69+0.81=2.5$
F_c	$(2,\ 0)$	$0.25+2.25=2.5$
E_a	$(1,\ 1)$	$2.25+0.25=2.5$
E_b	$(4,\ 1)$	$2.25+0.25=2.5$
E_c	$(2,\ 3)$	$0.25+2.25=2.5$

(مثلًا F_a: الارتفاع من A هو $y=x$، والضلع BC هو $x+y=6$، فيلتقيان في $(3,3)$. وF_b: الارتفاع من B عموديّ على AC الذي هو $y=2x$، فيلتقيان في $(1.2,\ 2.4)$.)

وفويرباخ؟ أطوال الأضلاع $a=\sqrt{32},\ b=\sqrt{20},\ c=6$، والمساحة 12. حسابٌ بالآلة الحاسبة يعطي $r=\frac{S}{s}\approx 1.4880$ و$I\approx(2.4076,\ 1.4880)$، ومن هنا

$$NI\approx 0.0931,\qquad \frac{R}{2}-r\approx 1.5811-1.4880=0.0931.$$

البعد بين المركزين يساوي الفرق بين نصفَي القطرين — الدائرتان متماسّتان فعلًا. ولاحظوا كم هما قريبتان: N وI على بعد أقلّ من عُشر وحدة!

تمرين للقرّاء: أربعة مثلثات ودائرة واحدة

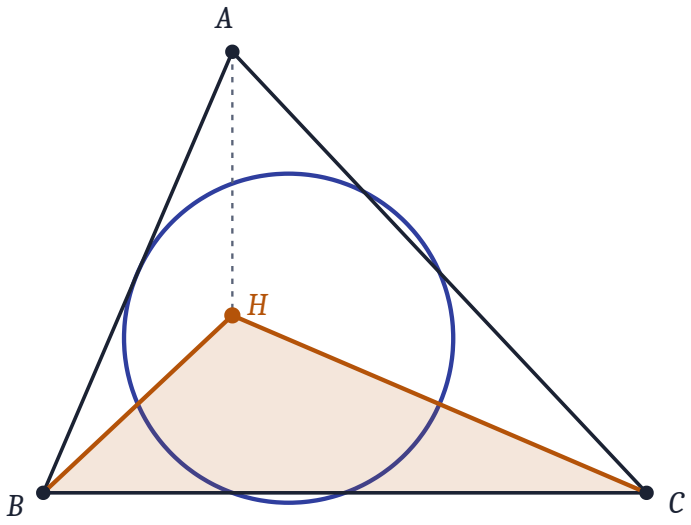
تمرين

المثلث ABC ليس قائم الزاوية، وH نقطة تلاقي ارتفاعاته.

أ. ما هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث HBC؟

ب. برهنوا أنّ للمثلثين ABC وHBC دائرة النقاط التسع نفسها.

ج. استنتجوا أنّ نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث HBC يساوي R.



المثلث HBC والمثلث ABC — ودائرة نقاط تسع واحدة لكليهما.

تلميح

في البند أ: الارتفاع من B في المثلث HBC عموديّ على HC. ما هو المستقيم العموديّ على HC والمارّ بـ B؟ في البند ب: اكتبوا النقاط التسع للمثلث HBC واحدة واحدة، وقارنوها بالنقاط التسع للمثلث ABC.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

أ. المستقيم CH هو الارتفاع من C في المثلث ABC، لذا $CH \perp AB$. إذن المستقيم المارّ بـ B والعموديّ على HC هو BA — وهو الارتفاع من B في المثلث HBC. وبالمثل الارتفاع من C في المثلث HBC هو CA. يلتقي الارتفاعان في A: نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث HBC هي A.

ب. نعدّ النقاط التسع للمثلث HBC:

منتصفات أضلاعه HB, BC, CH: هي E_b, M_a, E_c.
مواقع ارتفاعاته: الارتفاع من H هو المستقيم HA وموقعه F_a؛ الارتفاع من B هو BA ويلتقي بالمستقيم HC في F_c؛ والارتفاع من C يلتقي بالمستقيم HB في F_b.
منتصفات القطع من رؤوسه إلى نقطة تلاقي ارتفاعاته A: منتصفات HA, BA, CA، وهي E_a, M_c, M_b.

إنّها النقاط التسع نفسها بالضبط للمثلث ABC، بترتيب آخر! وتسع نقاط (بل ثلاث منها) تحدّد الدائرة، لذا للمثلثين دائرة النقاط التسع نفسها. ■

ج. نصف قطر دائرة النقاط التسع هو نصف نصف قطر الدائرة المحيطة — في كلّ مثلث. للمثلثين دائرة نقاط تسع واحدة، لذا نصفا قطرَي دائرتيهما المحيطتين متساويان: كلاهما R. وبالطريقة نفسها مع HCA وHAB: المثلثات الأربعة ABC, HBC, HCA, HAB لها دائرة نقاط تسع واحدة، ودوائرها المحيطة الأربع متساوية.

المراجع

K. W. Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, Nürnberg, 1822.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 1.

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover (originally 1929).