مقالة في الهندسة

مبرهنة نابليون

من أيّ مثلث يولد مثلث متساوي الأضلاع

خذوا أيّ مثلث، مهما كان مائلًا أو مشوّهًا. ابنوا على كلّ ضلع من أضلاعه مثلثًا متساوي الأضلاع، وعلّموا مراكز المثلثات الثلاثة. هذه المراكز هي دائمًا رؤوس مثلث متساوي الأضلاع. كلّ الفوضى في المثلث الأصليّ تختفي، ويبقى تناظر كامل.

الأستاذ خالد خطيب

في معظم المبرهنات عن المثلث يبقى شيء من شكل المثلث في النتيجة: مثلث المنتصفات يشبه المثلث الأصليّ، ومثلث مواقع الارتفاعات يتعلّق بزواياه. مبرهنة نابليون مختلفة: المدخلات أيّ مثلث على الإطلاق، والنتيجة دائمًا الشكل الأكثر انتظامًا — مثلث متساوي الأضلاع. وسنرى أنّ وراء هذا «السحر» حسابًا قصيرًا بقانون جيوب التمام.

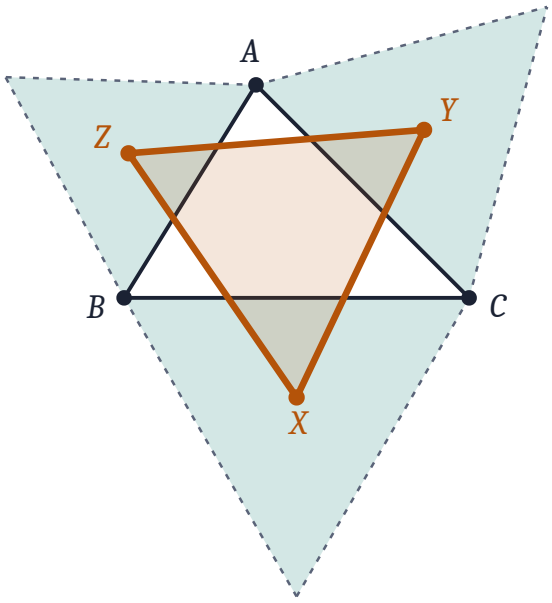
المبرهنة

مبرهنة نابليون

نبني على أضلاع المثلث ABC، من الخارج، ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع. لتكن X, Y, Z مراكز المثلثات المبنيّة على BC, CA, AB على الترتيب. عندئذٍ

$$\triangle XYZ \text{ متساوي الأضلاع}$$

ومركزه هو مركز ثقل المثلث ABC.



على كلّ ضلع **مثلث متساوي الأضلاع**. مراكزها X, Y, Z تكوّن **مثلث نابليون** — متساوي الأضلاع دائمًا.

ملاحظة: «مركز» المثلث المتساوي الأضلاع نقطة واحدة: فيه يلتقي مركز الثقل ومركز الدائرة الداخلية ومركز الدائرة الخارجية ونقطة تلاقي الارتفاعات. لذا لا لبس في الكلام عن «مركزه».

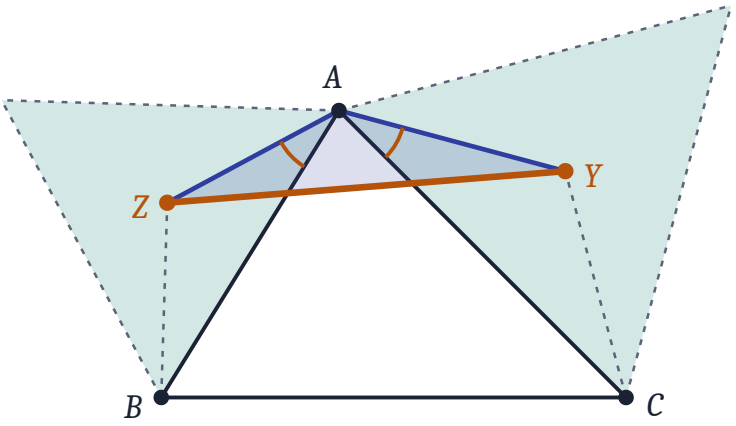
لمحة تاريخية

تحمل المبرهنة اسم الإمبراطور الفرنسيّ نابليون بونابرت (1769–1821)، لكنّ هذه النسبة مشكوك فيها جدًّا. صحيح أنّ نابليون أحبّ الرياضيات وتميّز فيها في المدرسة العسكرية، وكان صديقًا لرياضيّين كبار مثل لابلاس ولاغرانج ومونج، بل وأهدى إليه الإيطاليّ لورنزو ماسكيروني كتابه «هندسة الفرجار» عام 1797. لكن لا توجد وثيقة تدلّ على أنّه عرف هذه المبرهنة أو برهنها.

أقدم ظهور مطبوع معروف للمبرهنة كان عام 1825، كسؤال في المجلة البريطانية The Ladies' Diary، وهي مجلة سنويّة نشرت ألغازًا ومسائل رياضية لجمهور واسع. ارتبط اسم نابليون بالمبرهنة بعد ذلك بعشرات السنين، ويبدو أنّه أُلصق بها لأنّ القصّة جميلة أكثر ممّا هي صحيحة.

برهان بقانون جيوب التمام

الخطّة: نحسب طول الضلع YZ بدلالة أضلاع المثلث a, b, c ومساحته S، ونكتشف أنّ النتيجة **متناظرة** — لا تتغيّر إذا بدّلنا أدوار الأضلاع. لذا الضلعان الآخران XY وZX سيعطيان النتيجة نفسها.



في **المثلث** AYZ نعرف ضلعين والزاوية بينهما: الزاويتان **المعلّمتان** تساوي كلّ منهما $30°$، لذا $\angle YAZ = \angle A + 60°$.

1 البعد من رأس إلى المركز

في المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه c، المركز يقسم المتوسط بنسبة $2:1$، وطول المتوسط $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. لذا البعد من الرأس إلى المركز $\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{c}{\sqrt{3}}$. إذن

$$AZ = \frac{c}{\sqrt{3}}, \qquad AY = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

والمتوسط في المثلث المتساوي الأضلاع هو منصّف زاوية أيضًا، لذا $\angle ZAB = \angle YAC = 30°$.

2 الزاوية بينهما

الزاوية $\angle YAZ$ مكوّنة من ثلاثة أجزاء: $\angle A + 30° + 30° = \angle A + 60°$. (إذا كانت $\angle A > 120°$ فإنّ $\angle YAZ = 360° - (\angle A + 60°)$، ولها جيب التمام نفسه — فالحساب التالي لا يتغيّر.)

3 قانون جيوب التمام

في المثلث AYZ:

$$YZ^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(A+60^\circ).$$

نفتح $\cos(A+60^\circ) = \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$، ونعوّض $2bc\cos A = b^2+c^2-a^2$ (قانون جيوب التمام في ABC) و$bc\sin A = 2S$:

$$YZ^2 = \frac{b^2+c^2}{3} - \frac{b^2+c^2-a^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S.$$

4 صيغة متناظرة

نجمع الحدود:

$$YZ^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,S.$$

الطرف الأيسر يتعلّق بالضلعين b, c وبالزاوية A، لكنّ الطرف الأيمن متناظر تمامًا في a, b, c. لو كرّرنا الحساب للضلع ZX (عند الرأس B) أو للضلع XY (عند الرأس C) لحصلنا على العبارة نفسها بالضبط. إذن $XY = YZ = ZX$. ■

أين يقع مركز مثلث نابليون؟

نستعمل المتّجهات. ليكن ρ الدوران بزاوية 60° في الاتّجاه الذي يبني المثلثات الخارجية. رأس المثلث المبنيّ على BC هو $A' = B + \rho(C-B)$، وبالمثل $B' = C + \rho(A-C)$ و$C' = A + \rho(B-A)$. الدوران خطّيّ، لذا

$$A' + B' + C' = (A+B+C) + \rho\big((C-B)+(A-C)+(B-A)\big) = A+B+C+$$

المراكز هي مراكز الثقل: $X = \frac{B+C+A'}{3}$، وهكذا. نجمع:

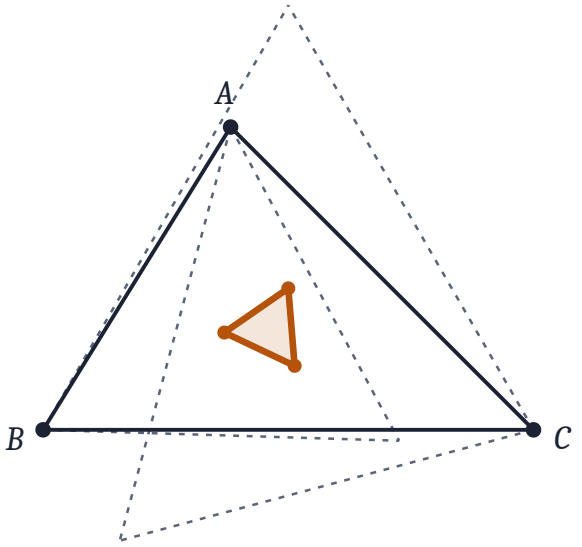
$$\frac{X+Y+Z}{3} = \frac{2(A+B+C)+(A'+B'+C')}{9} = \frac{A+B+C}{3}.$$

إذن مركز مثلث نابليون هو بالضبط مركز ثقل المثلث ABC — وهذا ما رأيتموه في العمود الرابع في المختبر: البعد دائمًا 0.

المثلث الداخليّ ومتباينة مخفيّة

إذا بنينا المثلثات المتساوية الأضلاع **إلى الداخل** (نحو المثلث)، فإنّ مراكزها تكوّن أيضًا مثلثًا متساوي الأضلاع — **مثلث نابليون الداخليّ** — ومركزه أيضًا مركز ثقل ABC. الحساب نفسه، مع الزاوية $\angle A - 60^\circ$ بدل $\angle A + 60^\circ$، يعطي

$$YZ^2_{\text{داخلي}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,S.$$



المثلثات المتساوية الأضلاع إلى الداخل (حدودها متقطّعة) ومراكزها: **مثلث نابليون الداخليّ**، أصغر بكثير.

والآن ملاحظة جميلة: مربّع طول ضلع لا يمكن أن يكون سالبًا. إذن لكلّ مثلث

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}S \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S.$$

هذه متباينة **فايتسنبوك**، وقد حصلنا عليها مجّانًا. والمساواة تتحقّق عندما ينكمش المثلث الداخليّ إلى نقطة — وهذا يحدث فقط في المثلث المتساوي الأضلاع (جرّبوا في المختبر).

مثال عددي

في المثلث الذي أضلاعه $3, 4, 5$: $a^2+b^2+c^2 = 50$ والمساحة $S = 6$. لذا

$$XY_{\text{خارجي}}^2 = \frac{50}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 6 = \frac{25}{3} + 4\sqrt{3} \approx 15.26, \qquad XY_{\text{خارجي}} \approx 3.91,$$

$$XY_{\text{داخلي}}^2 = \frac{25}{3} - 4\sqrt{3} \approx 1.41, \qquad XY_{\text{داخلي}} \approx 1.19.$$

المثلث الخارجيّ أكبر من الداخليّ بكثير، لكنّ كليهما متساوي الأضلاع، ولهما المركز نفسه.

تمرين للقرّاء: فرق المساحتين

تمرين

برهنوا أنّ الفرق بين مساحة مثلث نابليون الخارجيّ ومساحة مثلث نابليون الداخليّ يساوي بالضبط مساحة المثلث الأصليّ ABC.

تحقّقوا أوّلًا من المثال: في المثلث $3, 4, 5$ يجب أن يكون الفرق 6.

تلميح

مساحة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه s هي $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. لديكم صيغتان لمربّعَي الضلعين — اطرحوا إحداهما من الأخرى.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

لنرمز s_o, s_i إلى ضلعَي المثلثين الخارجيّ والداخليّ. وفق الصيغتين

$$s_o^2 - s_i^2 = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}S\right) - \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}S\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}S.$$

لذا الفرق بين المساحتين

$$\frac{\sqrt{3}}{4}s_o^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}s_i^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}S = S. \qquad \blacksquare$$

وفي المثال: $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{25}{3}+4\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{25}{3}-4\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8\sqrt{3} = 6$ ✓. لاحظوا أنّ الحدّ $a^2+b^2+c^2$ اختفى تمامًا: الفرق لا يتعلّق إلّا بالمساحة.

المراجع

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 3.

H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd ed., Wiley, 1969.

الأستاذ خالد خطيب · مبرهنة نابليون