مقالة في الهندسة

مبرهنة مورلي

معجزة مخبّأة في أثلاث الزوايا

نقسم كلّ زاوية في المثلث إلى ثلاثة أقسام متساوية. كلّ مقسِّمين متجاورين — قريبين من الضلع نفسه — يلتقيان في نقطة. النقاط الثلاث الناتجة هي دائمًا رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، في أيّ مثلث كان. اكتُشفت هذه الحقيقة في نهاية القرن التاسع عشر فقط، بعد أكثر من ألفي سنة من دراسة المثلث.

الأستاذ خالد خطيب

منصّفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة، وهذه حقيقة عرفها إقليدس. فماذا عن «مثلِّثات» الزوايا؟ لكلّ زاوية مستقيمان يقسمانها إلى ثلاثة أقسام متساوية، فيكون لدينا ستّة مستقيمات. هذه المستقيمات لا تلتقي في نقطة واحدة، لكنّها تخفي شيئًا أجمل بكثير. يسمّي الرياضيّون هذه المبرهنة «معجزة مورلي»، وسترون لماذا.

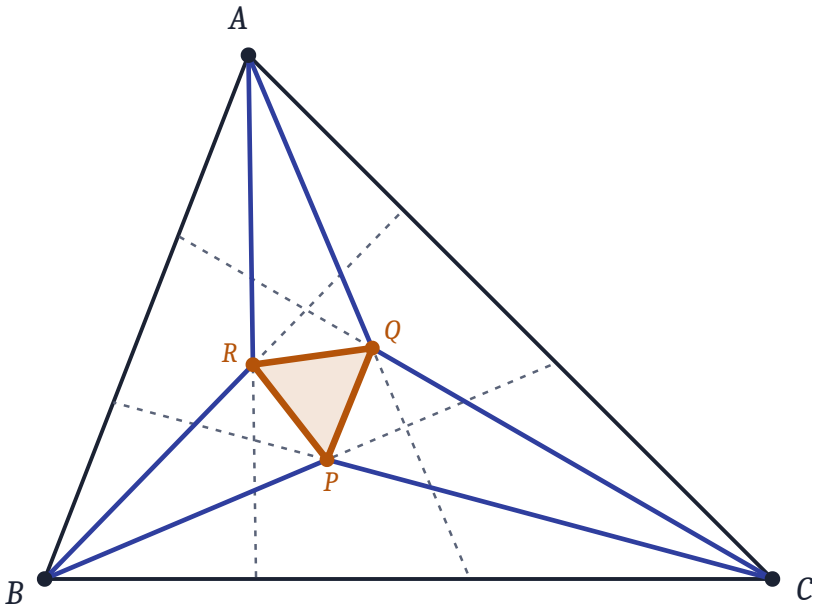
المبرهنة

مبرهنة مورلي

في المثلث ABC نقسم كلّ زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية. ليلتقِ المقسِّمان القريبان من الضلع BC في النقطة P، والقريبان من CA في Q، والقريبان من AB في R. عندئذٍ

$$\triangle PQR \text{ متساوي الأضلاع، وطول ضلعه } 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$$

حيث R نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.



كلّ زاوية مقسومة إلى ثلاثة أقسام متساوية. **المقسِّمات المتجاورة** تلتقي في رؤوس **مثلث مورلي** PQR — متساوي الأضلاع دائمًا. امتدادات المقسِّمات مرسومة بخطّ خافت.

ملاحظة: الرمز R يظهر هنا بمعنيين — رأس مثلث مورلي ونصف قطر الدائرة المحيطة. السياق يوضّح دائمًا أيّهما المقصود: في الصيغ المثلثاتية R هو نصف القطر.

لمحة تاريخية

اكتشف المبرهنة فرانك مورلي (1860–1937)، الرياضيّ الإنجليزيّ الذي عمل معظم حياته في الولايات المتحدة، في كلّية هافرفورد ثمّ في جامعة جونز هوبكنز، نحو عام 1899. وصل إليها مورلي من خلال بحث في موضوع متقدّم (منحنيات تمسّ أضلاع المثلث)، ولم تكن هدفه الأصليّ. انتشرت المبرهنة بين الرياضيّين، وظهرت لها في بدايات القرن العشرين براهين كثيرة.

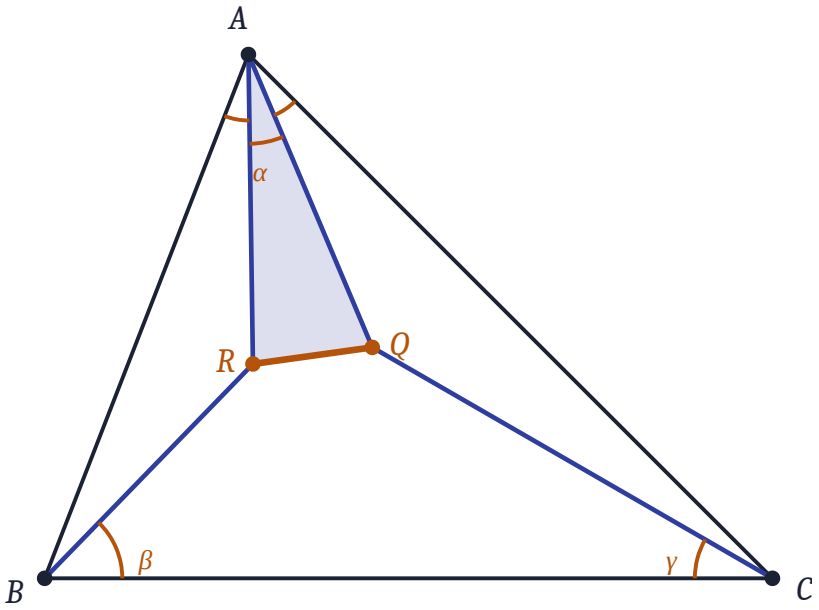
لماذا لم يكتشفها اليونانيّون، الذين درسوا المثلث بعمق؟ أحد التفسيرات المقبولة أنّ الهندسة اليونانيّة تعاملت مع ما يمكن بناؤه بالمسطرة والفرجار — وتثليث الزاوية لا يمكن بناؤه بهما في الحالة العامّة (وهذا ما برهنه بيير فانتزل عام 1837). لذا لم تكن «أثلاث الزوايا» موضوعًا طبيعيًّا للبحث. وما زالت المبرهنة تجذب الرياضيّين حتى اليوم: ففي عام 1998 نشر آلان كون، الحائز على وسام فيلدز، برهانًا جبريًّا جديدًا لها.

برهان مثلثاتي

لنرمز $\alpha = \frac{A}{3},\ \beta = \frac{B}{3},\ \gamma = \frac{C}{3}$. بما أنّ $A + B + C = 180^\circ$ فإنّ

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ.$$

الفكرة: نحسب طول الضلع QR ونكتشف أنّ النتيجة متناظرة في α, β, γ. عندئذٍ الضلعان الآخران متساويان له تلقائيًّا.



في **المثلث** AQR نعرف الزاوية α عند A. نحسب الضلعين AR وAQ من المثلثين ABR وACQ، ثم QR بقانون جيوب التمام.

1 متطابقة مساعدة

لكلّ زاوية x:

$$\sin 3x = 4 \sin x \, \sin(60^\circ + x) \, \sin(60^\circ - x).$$

البرهان: $\sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x) = \sin^2 60^\circ - \sin^2 x = \frac{3}{4} - \sin^2 x$ (حاصل ضرب جيبين بصيغة الفرق بين مربّعين). لذا الطرف الأيمن يساوي $3\sin x - 4\sin^3 x$، وهي صيغة $\sin 3x$ المعروفة.

2 الضلع AR

في المثلث ABR: الزاوية عند A هي α، والزاوية عند B هي β، لذا $\angle ARB = 180^\circ - \alpha - \beta = 120^\circ + \gamma$. ووفق قانون الجيوب في المثلث الكبير $AB = c = 2R\sin C = 2R\sin 3\gamma$. وفق قانون الجيوب في المثلث ABR:

$$AR = \frac{c\sin\beta}{\sin(120^\circ+\gamma)} = \frac{2R\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(60^\circ-\gamma)}.$$

(استعملنا $\sin(120^\circ+\gamma) = \sin(60^\circ-\gamma)$.) نعوّض المتطابقة مع $x = \gamma$، فيختصر $\sin(60^\circ-\gamma)$:

$$AR = 8R\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin(60^\circ+\gamma).$$

3 الضلع AQ

بالطريقة نفسها في المثلث ACQ (الزاويتان α عند A وγ عند C، و$b = 2R\sin 3\beta$):

$$AQ = 8R\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin(60^\circ+\beta).$$

4 قانون جيوب التمام — ومثلث مساعد

في المثلث AQR الزاوية $\angle QAR = \alpha$. نخرج العامل المشترك $8R\sin\beta\sin\gamma$:

$$QR^2 = (8R\sin\beta\sin\gamma)^2\Big[\sin^2(60^\circ+\gamma) + \sin^2(60^\circ+\beta) - 2\sin(60^\circ+\gamma)\sin(60$$

الآن الحيلة: الزوايا $\alpha,\ 60^\circ+\beta,\ 60^\circ+\gamma$ مجموعها $\alpha+\beta+\gamma+120^\circ = 180^\circ$، لذا هي زوايا مثلث ما. لنأخذ مثلثًا كهذا مرسومًا في دائرة قطرها 1؛ وفق قانون الجيوب أطوال أضلاعه هي $\sin\alpha,\ \sin(60^\circ+\beta),\ \sin(60^\circ+\gamma)$. قانون جيوب التمام في هذا المثلث المساعد، للضلع المقابل للزاوية α، يقول بالضبط إنّ ما بين القوسين يساوي $\sin^2\alpha$. إذن

$$QR = 8R\,\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma.$$

5 التناظر

النتيجة متناظرة تمامًا في α, β, γ. لو كرّرنا الحساب للضلع RP (عند الرأس B) أو للضلع PQ (عند الرأس C) لحصلنا على العبارة نفسها. إذن $PQ = QR = RP = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$. ■

براهين أخرى. هناك براهين كثيرة لمبرهنة مورلي. من أشهرها برهان «عكسيّ» للرياضيّ جون كونواي: نبدأ من مثلث متساوي الأضلاع، ونلصق به مثلثات بزوايا مختارة بدقّة، ونبيّن أنّ الشكل الناتج مثلث مشابه للمثلث المعطى. وآلان كون برهنها بالجبر، بالنظر إلى دورانات في المستوى.

مثال عددي

في المثلث القائم الزاوية الذي زواياه $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ وطول وتره 2: الوتر قطر في الدائرة المحيطة، لذا $R = 1$. طول ضلع مثلث مورلي:

$$8 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ \sin 20^\circ \sin 10^\circ = 4 \sin 20^\circ \sin 10^\circ \approx 4 \cdot 0.342 \cdot 0.174 \approx 0.238.$$

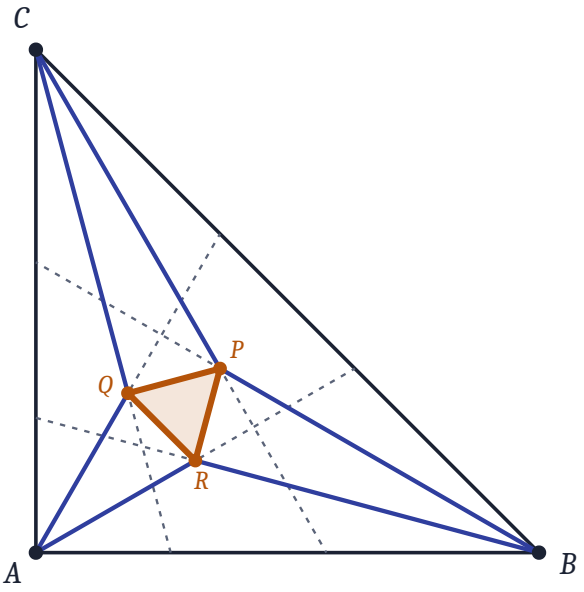
للمقارنة: ضلعا القائمة 1 و$\sqrt{3} \approx 1.73$. مثلث مورلي صغير بالنسبة إلى المثلث الأصليّ — وهذا ما يحدث دائمًا. حتى في المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه s (حيث $R = \frac{s}{\sqrt{3}}$) يكون ضلعه $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin^3 20^\circ \cdot s \approx 0.18\,s$ فقط.

تمرين للقرّاء: مثلث قائم متساوي الساقين

تمرين

في المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين، طول كلّ من ضلعَي القائمة 1. احسبوا طول ضلع مثلث مورلي بالضبط (بدون آلة حاسبة)، وبرهنوا أنّه يساوي

$$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$



مثلث مورلي في المثلث القائم المتساوي الساقين. لاحظوا أنّه متناظر بالنسبة إلى منصّف الزاوية القائمة.

تلميح

ما هو R في مثلث قائم الزاوية؟ وما هي أثلاث الزوايا $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$؟ لحساب $\sin^2 15^\circ$ استعملوا $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

الوتر $\sqrt{2}$ قطر في الدائرة المحيطة، لذا $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. الأثلاث: $30^\circ, 15^\circ, 15^\circ$. وفق الصيغة:

$$8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin^2 15^\circ = 2\sqrt{2}\,\sin^2 15^\circ.$$

ومن $\sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$:

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 0.189. \qquad \blacksquare$$

ضلع مثلث مورلي أقلّ من خُمس ضلع القائمة. قارنوا مع الرسم.

المراجع

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 2.

A. Connes, “A new proof of Morley’s theorem”, *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 88 (1998), 43–46.
