مقالة في الهندسة

مبرهنة ميكيل

ثلاث دوائر، ونقطة واحدة لا تفارقها

نختار نقطة على كلّ ضلع من أضلاع المثلث، ونرسم ثلاث دوائر: كلّ دائرة تمرّ برأس من رؤوس المثلث وبالنقطتين اللتين على الضلعين الخارجين منه. ليس هناك سبب ظاهر لأن تلتقي الدوائر الثلاث معًا — ومع ذلك فهي تلتقي دائمًا في نقطة واحدة. والبرهان يحتاج فقط إلى خاصّة واحدة من دروس الشكل الرباعيّ الدائريّ.

الأستاذ خالد خطيب

دائرتان تتقاطعان عادةً في نقطتين. ثلاث دوائر «عشوائيّة» لا تلتقي في نقطة مشتركة — يحتاج ذلك إلى صدفة نادرة. مبرهنة ميكيل تقول إنّ هذه «الصدفة» تحدث في كلّ مرّة، لأيّ مثلث ولأيّ اختيار للنقاط على أضلاعه. وراء ذلك حساب زوايا بسيط وجميل، وفي نهاية الطريق تختبئ حالات خاصّة نعرفها: نقطة تلاقي الارتفاعات، ومركز الدائرة المحيطة بالمثلث.

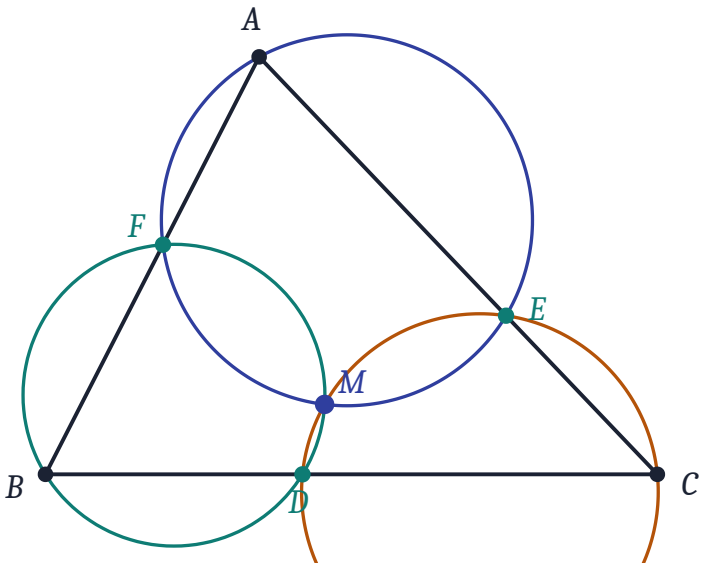
المبرهنة

مبرهنة ميكيل

لتكن D، E، F نقاطًا على الأضلاع BC، CA، AB للمثلث ABC. عندئذٍ الدوائر الثلاث المارّة بالنقاط

$$A, E, F \qquad B, F, D \qquad C, D, E$$

تلتقي في نقطة واحدة M، تُسمّى **نقطة ميكيل**.



الدوائر **AEF** و**BFD** و**CDE** تمرّ كلّها بالنقطة M.

طريقة سهلة للتذكّر: كلّ دائرة «تخصّ» رأسًا واحدًا، وتمرّ بالرأس وبالنقطتين القريبتين منه — النقطتين اللتين على الضلعين الخارجين من هذا الرأس.

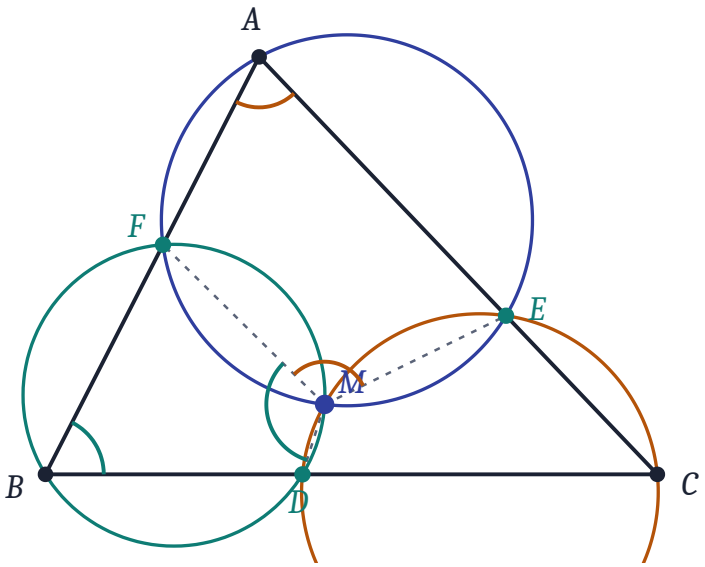
ملاحظة: قد تقع نقطة ميكيل داخل المثلث أو خارجه. المبرهنة صحيحة في كلّ الحالات، بل وتبقى صحيحة إذا وقعت النقاط D, E, F على امتدادات الأضلاع. في البرهان أدناه نفترض أنّ M داخل المثلث، كي يكون حساب الزوايا واضحًا.

لمحة تاريخية

تحمل المبرهنة اسم الرياضيّ الفرنسيّ أوغست ميكيل، الذي نشرها عام 1838 في مجلّة الرياضيات البحتة والتطبيقية (Journal de mathématiques pures et appliquées) التي أسّسها جوزيف ليوفيل، ضمن سلسلة من المبرهنات عن الدوائر والمضلّعات. يُعرف عن حياة ميكيل القليل، لكنّ اسمه بقي في عدد من المبرهنات الجميلة، منها «نقطة ميكيل» لأربعة مستقيمات التي سنراها لاحقًا.

البرهان

الأداة الوحيدة: **في الشكل الرباعيّ الدائريّ مجموع كلّ زاويتين متقابلتين 180°**، والعكس: رباعيّ مجموع زاويتين متقابلتين فيه 180° هو رباعيّ دائريّ. نرمز إلى زوايا المثلث بـ $\angle A, \angle B, \angle C$.



بالبرتقالي: الزاويتان $\angle A$ و$\angle FME$ — متكاملتان. **بالأخضر**: الزاويتان $\angle B$ و$\angle DMF$ — متكاملتان.

1 نبدأ بدائرتين فقط

الدائرتان AEF وBFD تمرّان كلتاهما بالنقطة F، لذا تتقاطعان في نقطة أخرى (أو تتماسّان في F). نسمّي نقطة التقاطع الثانية M. علينا أن نبرهن أنّ M تقع على الدائرة الثالثة CDE أيضًا.

2 الرباعيّان الدائريّان

الرباعيّ $AFME$ دائريّ (رؤوسه على الدائرة الأولى)، والزاويتان عند A وعند M متقابلتان فيه، لذا

$$\angle FME = 180^\circ - \angle A.$$

وبالطريقة نفسها الرباعيّ $BDMF$ دائريّ، لذا

$$\angle DMF = 180^\circ - \angle B.$$

3 **الزاوية الثالثة حول M**

مجموع الزوايا الثلاث حول النقطة M هو $360°$:

$$\angle DME = 360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = \angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

4 **نغلق الدائرة**

في الرباعيّ $CDME$ مجموع الزاويتين المتقابلتين عند C وعند M هو $180°$. إذن هو رباعيّ دائريّ، أي أنّ M تقع على الدائرة المارّة بـ C, D, E. ■

(عندما تقع M خارج المثلث يتغيّر الرسم، وبدل «متكاملتين» قد نحصل على «متساويتين»؛ يحلّ الرياضيّون هذه المشكلة بـ «الزوايا الموجّهة»، فيصلح برهان واحد لكلّ الحالات.)

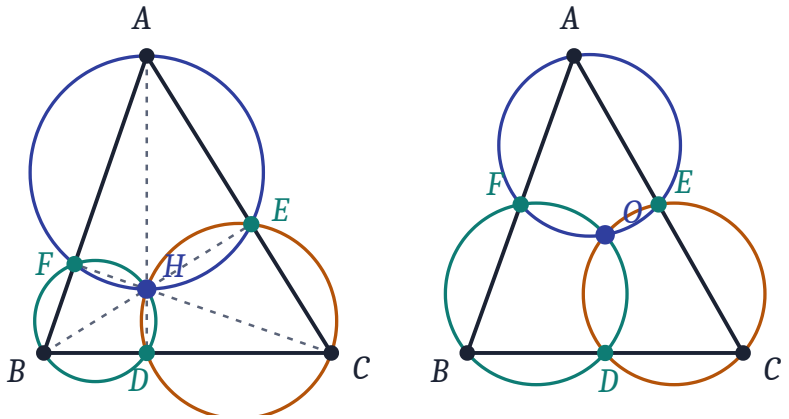
حالتان خاصّتان مألوفتان

1 **مواقع الارتفاعات ← نقطة تلاقي الارتفاعات**

لتكن D, E, F مواقع الارتفاعات في مثلث حادّ الزوايا، وH نقطة تلاقيها. بما أنّ $\angle AEH = \angle AFH = 90°$، فالنقطتان E, F تريان القطعة AH بزاوية قائمة، لذا الدائرة AEF هي الدائرة التي قطرها AH، وهي تمرّ بـ H. وكذلك الدائرتان الأخريان. إذن نقطة ميكيل هي H.

2 **المنتصفات ← مركز الدائرة المحيطة**

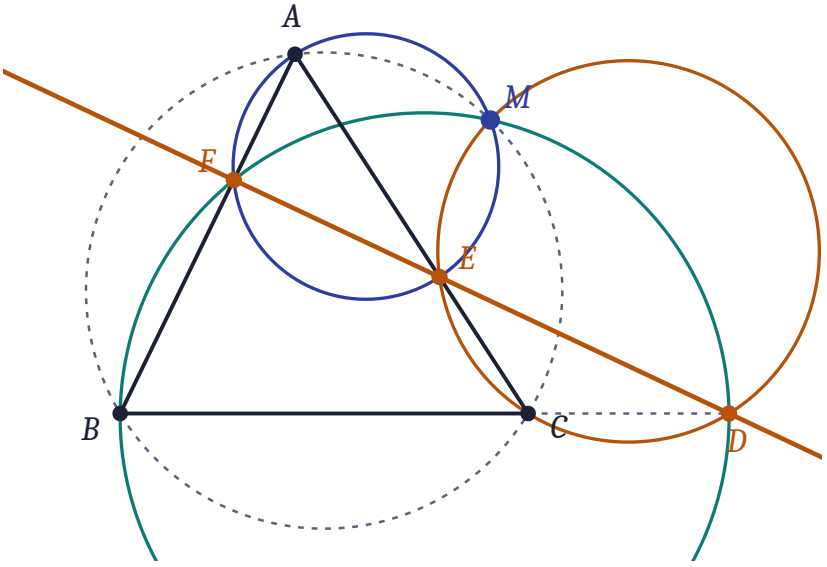
لتكن D, E, F منتصفات الأضلاع، وO مركز الدائرة المحيطة بالمثلث. العمود المنصّف للضلع AB يمرّ بـ O وبالمنتصف F، لذا $\angle AFO = 90°$، وبالمثل $\angle AEO = 90°$. إذن الدائرة AEF قطرها AO وتمرّ بـ O — وكذلك الدائرتان الأخريان. نقطة ميكيل هي O.



في الرسم الأيسر: D, E, F مواقع الارتفاعات، ونقطة ميكيل هي H. في الرسم الأيمن: D, E, F المنتصفات، ونقطة ميكيل هي O. جرّبوا الزرّين في المختبر.

نقطة ميكيل لأربعة مستقيمات

أربعة مستقيمات في «وضع عامّ» (لا يتوازى اثنان منها ولا يمرّ ثلاثة منها بنقطة واحدة) تحدّد أربعة مثلثات: كلّ ثلاثة مستقيمات منها تحصر مثلثًا. مبرهنة ميكيل للمستقيمات الأربعة: **الدوائر الأربع المحيطة بهذه المثلثات تمرّ بنقطة واحدة.**



المستقيمات الأربعة: أضلاع المثلث الثلاثة و**المستقيم القاطع**. المثلثات الأربعة: ABC، AEF، BDF، CDE، ودوائرها المحيطة تلتقي في M.

البرهان تطبيق مزدوج للمبرهنة (بصيغتها التي تسمح بالنقاط على الامتدادات). في المثلث ABC مع النقاط D, E, F: الدوائر AEF, BDF, CDE تلتقي في نقطة M. والآن ننظر إلى المثلث BDF والنقاط التي يقطع بها المستقيم AC أضلاعه: C على BD، E على DF، A على FB. وفق المبرهنة تلتقي الدوائر BCA, DCE, FEA في نقطة واحدة. الدائرتان CDE وAEF مشتركتان بين الثلاثيّتين، ونقطتا تقاطعهما هما E وM فقط — والدائرة ABC لا تمرّ بـ E — لذا نقطة الالتقاء الثانية هي M أيضًا. إذن الدوائر الأربع تمرّ بـ M.

مثال عددي

زوايا المثلث ABC هي $\angle A = 50^\circ$، $\angle B = 60^\circ$، $\angle C = 70^\circ$، والنقاط D, E, F على الأضلاع بحيث تقع نقطة ميكيل M داخل المثلث. احسبوا الزوايا الثلاث $\angle DME$, $\angle DMF$, $\angle FME$.

الحلّ. وفق الخطوتين 2 و3 في البرهان:

$$\angle DME = 180^\circ - \quad \angle DMF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \quad \angle FME = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ,$$

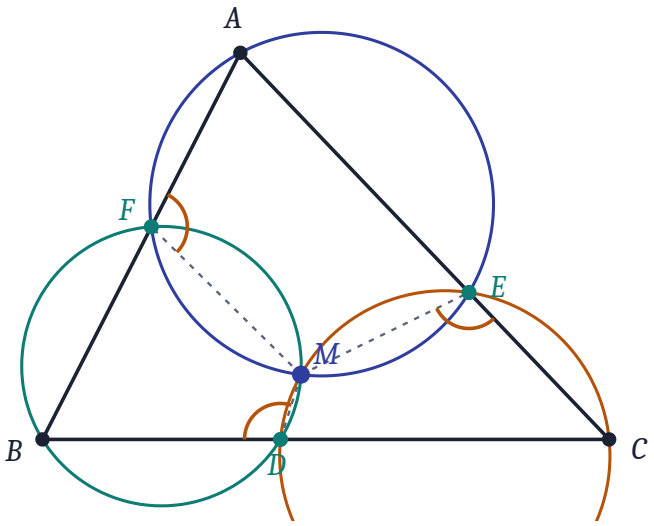
التحقّق: $130^\circ + 120^\circ + 110^\circ = 360^\circ$. ✓ لاحظوا أنّ الجواب لا يتعلّق بموضع النقاط D, E, F إطلاقًا — ما دامت M داخل المثلث. وفي حالة مواقع الارتفاعات نحصل على حقيقة معروفة: $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$.

تمرين للقرّاء: ثلاث زوايا متساوية

تمرين

لتكن M نقطة ميكيل للنقاط D, E, F على أضلاع المثلث ABC، ولتقع داخل المثلث. برهنوا أنّ القطع MD, ME, MF تصنع زوايا متساوية مع الأضلاع:

$$\angle AFM = \angle BDM = \angle CEM.$$



الزوايا الثلاث المعلّمة **بالبرتقالي** متساوية — كما رأيتم في المختبر.

تلميح

في الرباعيّ الدائريّ $AFME$ ما العلاقة بين $\angle AFM$ و$\angle AEM$؟ وما العلاقة بين $\angle AEM$ و$\angle MEC$؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

في الرباعيّ الدائريّ $AFME$: $\angle AFM + \angle AEM = 180^\circ$. ومن جهة أخرى $\angle AEM + \angle MEC = 180^\circ$ (زاويتان متجاورتان على المستقيم AC). إذن $\angle AFM = \angle MEC$.

وفي الرباعيّ الدائريّ $BDMF$: $\angle BDM + \angle BFM = 180^\circ$، ومن جهة أخرى $\angle BFM + \angle AFM = 180^\circ$ (على المستقيم AB). إذن $\angle BDM = \angle AFM$.

بالمجمل $\angle AFM = \angle BDM = \angle CEM$. ■

ونتيجة لطيفة: إذا كانت $MD \perp BC$، فإنّ الزوايا الثلاث قائمة، أي أنّ D, E, F هي مواقع الأعمدة النازلة من M على الأضلاع. وبالعكس: لكلّ نقطة M داخل المثلث، مواقع الأعمدة منها على الأضلاع تعطي نقاطًا نقطة ميكيل لها هي M نفسها.

المراجع

A. Miquel, “Théorèmes de géométrie”, *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3 (1838), 485–487.

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960 (originally 1929).

الأستاذ خالد خطيب · مبرهنة ميكيل