مقالة في الهندسة

مبرهنة منلاوس

متى تقع ثلاث نقاط على مستقيم واحد؟

نرسم مستقيمًا يقطع مثلثًا. يلتقي المستقيم بالمستقيمات الثلاثة التي تقع عليها الأضلاع في ثلاث نقاط، وكلّ نقطة منها تقسم ضلعًا بنسبة ما. تقول مبرهنة منلاوس إنّ هذه النسب الثلاث ليست حرّة: حاصل ضربها يساوي 1 دائمًا. وهي الأخت التوأم لمبرهنة تشيفا — بفارق ألفٍ وخمسمئة سنة.

الأستاذ خالد خطيب

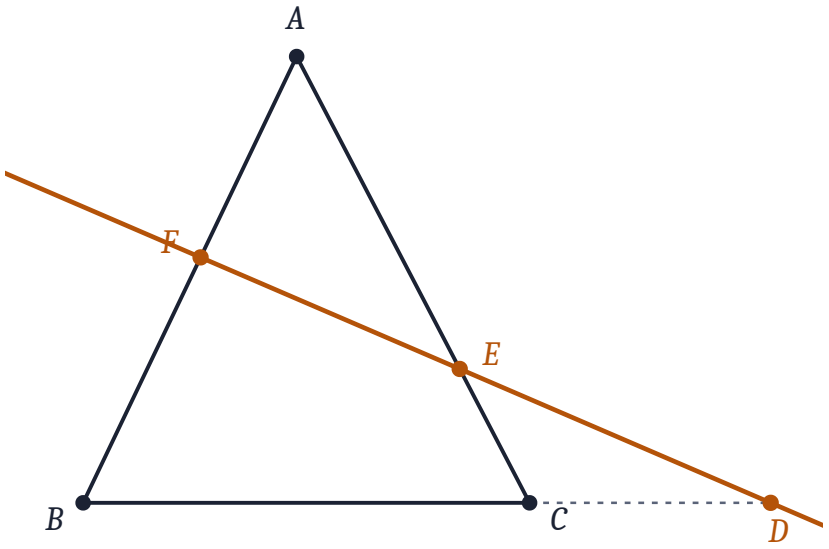
في مقالة مبرهنة تشيفا رأينا شرطًا بسيطًا يحسم متى تلتقي ثلاث قطع في نقطة واحدة. السؤال «المعاكس» لا يقلّ أهمّية: متى تقع ثلاث نقاط على **مستقيم واحد**؟ في مسائل كثيرة نحتاج إلى برهان أنّ ثلاث نقاط على استقامة واحدة، وقد يكون ذلك صعبًا بالزوايا. مبرهنة منلاوس تحوّل هذا السؤال إلى حساب نسب، وتعطي في الطريق أداة قويّة لحساب نِسَب القطع في المثلث.

المبرهنة

مبرهنة منلاوس

ليقطع مستقيمٌ لا يمرّ برؤوس المثلث ABC المستقيماتِ BC, CA, AB في النقاط D, E, F على الترتيب. عندئذٍ

$$\boxed{\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1}$$



المستقيم القاطع يقطع الضلعين AB وAC في F وE، ويقطع امتداد الضلع BC في D (الامتداد بخطّ متقطّع).

الصيغة مطابقة تمامًا لصيغة مبرهنة تشيفا، ويُكتب ترتيب الحروف بالطريقة نفسها: نسير حول المثلث $A \to B \to C \to A$، ونكتب في كلّ مرّة «من الرأس إلى النقطة» على «من النقطة إلى الرأس التالي». الفرق الوحيد هو موقع النقاط:

في **مبرهنة تشيفا** تقع النقاط الثلاث على الأضلاع نفسها، والقطع تلتقي.
في **مبرهنة منلاوس** تقع نقطة واحدة **أو ثلاث نقاط** على امتدادات الأضلاع، والنقاط على مستقيم واحد.

لماذا «واحدة أو ثلاث» بالضبط؟ مستقيم يدخل المثلث يجب أن يخرج منه — لذا يقطع ضلعين بالضبط، ويقطع امتداد الضلع الثالث. ومستقيم لا يدخل المثلث لا يقطع أيّ ضلع، فيقطع الامتدادات الثلاثة. لا يمكن أن يقطع مستقيم ضلعًا واحدًا فقط أو ثلاثة أضلاع (هذه هي «مسلّمة باش»). إذا استعملنا نسبًا ذات إشارة — سالبة على الامتداد — صار الشرط في مبرهنة منلاوس -1، وفي مبرهنة تشيفا $+1$.

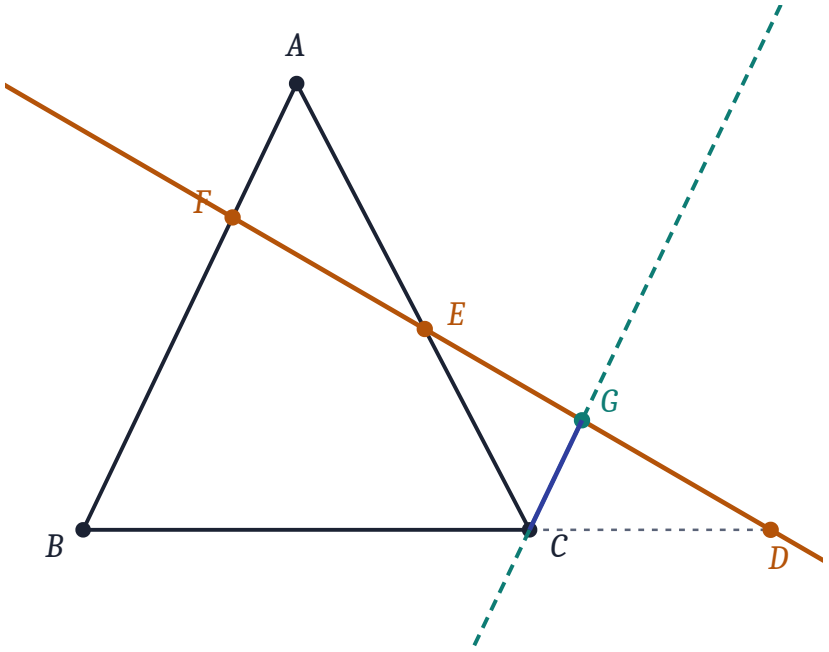
لمحة تاريخية

منلاوس الإسكندرانيّ (نحو 70–140 م) فلكيّ ورياضيّ يونانيّ عاش في الإسكندرية وفي روما؛ ويذكر بطليموس في «المجسطي» أرصادًا فلكية أجراها منلاوس في روما عام 98 م. أشهر كتبه «الأُكَر» (Sphaerica)، في هندسة الكرة، وفيه برهن الصيغة الكرويّة للمبرهنة: على الكرة، حيث «المستقيمات» هي دوائر عظمى. أمّا الصيغة المستوية التي نتناولها هنا فقد استعملها في برهانه كحقيقة معروفة، لذا يبدو أنّها أقدم منه.

لم يصلنا الأصل اليونانيّ لكتاب «الأُكَر»، وإنّما وصلنا عبر ترجماته العربية، وأشهرها إصلاح أبي نصر منصور بن عراق (نحو 960–1036)، أستاذ البيرونيّ. وقد سمّى الرياضيّون العرب المبرهنة «**الشكل القطّاع**»، وكانت أساس حساب المثلثات الكرويّ الذي احتاجوه في الفلك وفي تحديد اتّجاه القبلة. وفي القرن الثالث عشر خصّص لها نصير الدين الطوسيّ كتابًا كاملًا: «كتاب الشكل القطّاع»، عرض فيه الصيغتين المستوية والكرويّة بشكل منهجيّ.

برهان بمستقيم موازٍ

الفكرة: نضيف مستقيمًا واحدًا موازيًا لأحد الأضلاع، فتظهر أمامنا أزواج من المثلثات المتشابهة، وتختفي كلّ الأطوال الإضافية في النهاية.



نرسم من C **مستقيمًا موازيًا لـ** AB، فيقطع المستقيم القاطع في النقطة G. القطعة CG هي «الجسر» بين النسب الثلاث.

1 زوج أوّل من المثلثات المتشابهة

بما أنّ $AB \parallel CG$، فالمثلثان DCG وDBF متشابهان (زاوية مشتركة عند D، وزاويتان متناظرتان). لذا

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CG}.$$

2 زوج ثانٍ

وللسبب نفسه المثلثان ECG وEAF متشابهان (زاويتان متقابلتان بالرأس عند E، وزاويتان متبادلتان). لذا

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CG}{AF}.$$

3 نضرب

نعوّض في الطرف الأيسر للمبرهنة:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BF}{CG}\cdot\frac{CG}{AF}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \qquad \blacksquare$$

البرهان نفسه يصلح كلمةً بكلمة عندما يقع المستقيم خارج المثلث كلّيًّا؛ يتغيّر الرسم فقط.

العكس

لتكن D, E, F نقاطًا على المستقيمات BC, CA, AB، بحيث تقع واحدة منها أو ثلاث على امتدادات الأضلاع، ويتحقّق

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

عندئذٍ تقع النقاط الثلاث على مستقيم واحد.

البرهان. ليقطع المستقيم EF المستقيمَ BC في النقطة D'. وفق المبرهنة $\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$. على المستقيم BC توجد نقطتان بالضبط تقسمان القطعة BC بنسبة معطاة (لا تساوي 1): واحدة داخل القطعة وواحدة خارجها. وشرط «واحدة أو ثلاث على الامتدادات» — الذي يتحقّق لـ D' وفق مسلّمة باش ولـ D وفق المعطى — يضمن أنّ D وD' من النوع نفسه. إذن $D=D'$. $\blacksquare$

انتبهوا: شرط الموقع ضروريّ. إذا وقعت النقاط الثلاث على الأضلاع نفسها وكان حاصل الضرب 1، فهي **ليست** على مستقيم واحد — بل تلتقي القطع AD, BE, CF في نقطة واحدة، وفق مبرهنة تشيفا!

منلاوس يبرهن تشيفا

العلاقة بين المبرهنتين أعمق من تشابه الصيغتين: يمكن استنتاج مبرهنة تشيفا من مبرهنة منلاوس مباشرةً. لتلتقِ القطع AD, BE, CF في P.

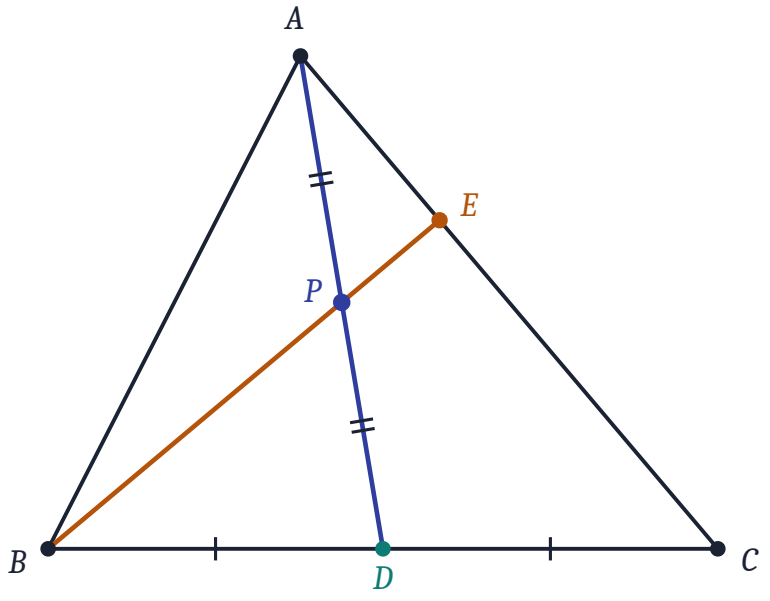
في المثلث ABD يقطع المستقيمُ CF الأضلاعَ في F (على AB) وC (على امتداد BD) وP (على DA).
وفق منلاوس: $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DP}{PA}=1$.
في المثلث ADC يقطع المستقيمُ BE الأضلاعَ في P وB (على امتداد DC) وE. وفق منلاوس:
$\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$.

نضرب المساواتين. تختصر $\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DP}{PA}$ و$\frac{BC}{BC}$، ويبقى بالضبط

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

مثال عددي

في المثلث ABC النقطة D منتصف الضلع BC، والنقطة P منتصف المتوسط AD. المستقيم BP يقطع الضلع AC في النقطة E. بأيّ نسبة تقسم E الضلع AC؟



نطبّق مبرهنة منلاوس على المثلث ADC مع **القاطع** BE.

الحلّ. المستقيم BPE يقطع أضلاع المثلث ADC: الضلع AD في P، امتداد الضلع DC في B، والضلع CA في E. وفق مبرهنة منلاوس:

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

معطى $\frac{AP}{PD} = 1$، وبما أنّ D منتصف BC فإنّ $\frac{DB}{BC} = \frac{1}{2}$. إذن

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{CE}{EA} = 2,$$

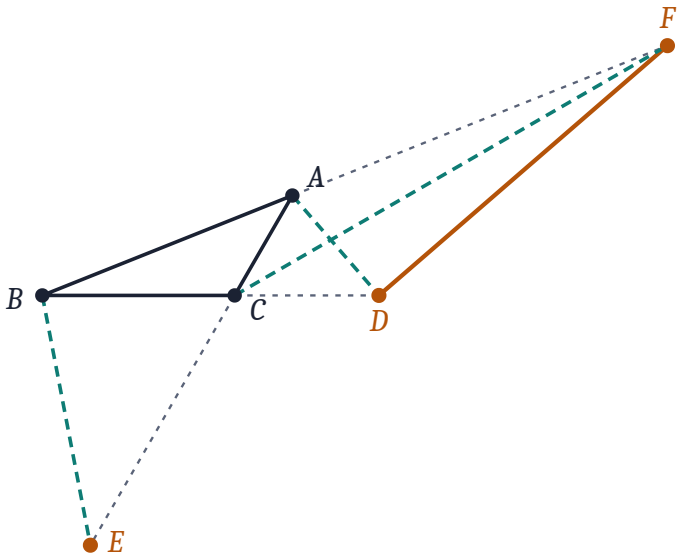
أي $AE : EC = 1 : 2$، و$AE = \frac{1}{3}AC$. مرّة أخرى: الجواب صحيح لكلّ مثلث، دون أيّ طول أو زاوية.

تحدٍّ صغير. استعملوا مبرهنة منلاوس في المثلث BEC مع القاطع ADP، وبرهنوا أنّ $BP : PE = 3 : 1$.

تمرين للقرّاء: المنصّفات الخارجية

تمرين

في المثلث ABC أطوال الأضلاع الثلاثة مختلفة. يقطع منصّف الزاوية الخارجية عند A المستقيمَ BC في النقطة D، ومنصّف الزاوية الخارجية عند B المستقيمَ CA في E، ومنصّف الزاوية الخارجية عند C المستقيمَ AB في F. برهنوا أنّ النقاط $D,\ E,\ F$ تقع على مستقيم واحد.



المنصّفات الخارجية الثلاثة تقطع امتدادات الأضلاع في ثلاث نقاط تقع على **مستقيم واحد**. لاحظوا كم يجب أن نبتعد عن المثلث كي نراها.

تلميح

لمبرهنة منصّف الزاوية صيغة «خارجية» أيضًا: منصّف الزاوية الخارجية عند A يقسم الضلع BC من الخارج بنسبة الضلعين المجاورين، أي $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. ولماذا اشترطنا أن تكون الأضلاع مختلفة؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

إذا كان $AB = AC$ فإنّ المنصّف الخارجيّ عند A موازٍ لـ BC ولا يقطعه — لذلك اشترطنا أن تكون الأضلاع مختلفة. في هذه الحالة تقع كلّ واحدة من النقاط الثلاث على امتداد ضلع (المنصّف الخارجيّ لا يدخل المثلث)، أي ثلاث نقاط على الامتدادات — والشرط على الموقع متحقّق.

وفق مبرهنة المنصّف الخارجيّ:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}.$$

نضرب:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

ووفق عكس مبرهنة منلاوس تقع النقاط الثلاث على مستقيم واحد. ■

قارنوا مع مقالة تشيفا: هناك أعطت المنصّفات **الداخلية** النسب نفسها بالضبط، $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}$، لكنّ النقاط وقعت على الأضلاع — فالتقت القطع في نقطة. النسب نفسها، والموقع وحده يقرّر: نقطة تلاقٍ أم مستقيم واحد.

المراجع

نصير الدين الطوسيّ، *كتاب الشكل القطّاع*، القرن الثالث عشر الميلاديّ.

R. Rashed, A. Papadopoulos, *Menelaus' Spherics: Early Translation and al-Māhānī / al-Harawī's Version*, De Gruyter, 2017.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 3.
