مقالة في الهندسة

نقطة لوموان ودائرتا لوموان

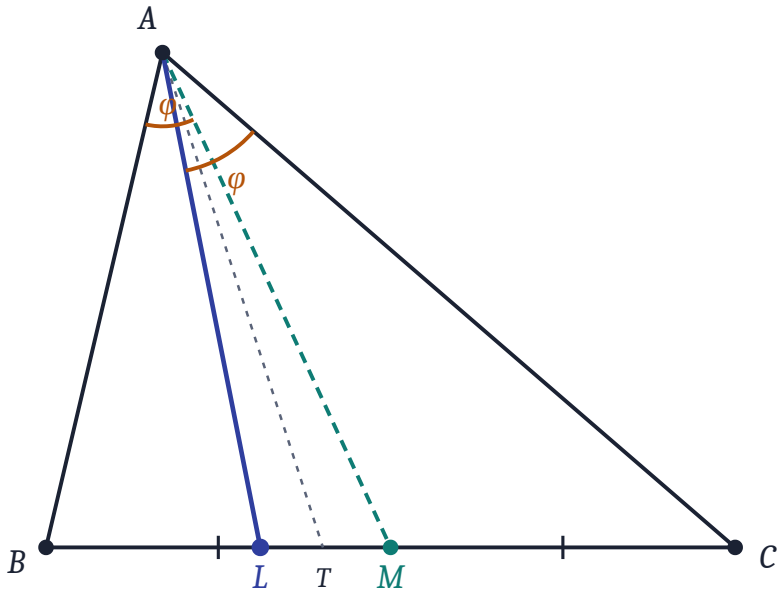
ماذا يحدث للمتوسّطات إذا عكسناها في المرآة؟

نأخذ متوسّطًا في المثلث ونعكسه حول منصّف الزاوية الخارج من الرأس نفسه. نحصل على قطعة جديدة: «المتوسّط المنعكس» أو السيميديان. السيميديانات الثلاثة تلتقي هي أيضًا في نقطة واحدة — نقطة لوموان — ولهذه النقطة خصائص تفوق في جمالها خصائص مركز الثقل نفسه: أبعادها عن الأضلاع تتناسب مع الأضلاع، والموازيات للأضلاع المارّة بها تقطع الأضلاع في ستّ نقاط على دائرة واحدة.

الأستاذ خالد خطيب

المتوسّط AM والمنصّف AT يخرجان من الرأس نفسه، وفي المثلث غير المتساوي الساقين يختلفان.

«انعكاس» المتوسّط حول المنصّف هو المستقيم الذي يصنع مع الضلع AC الزاوية نفسها التي يصنعها المتوسّط مع الضلع AB. نسمّي القطعة الناتجة من A حتى BC **السيميديان** من A (من الكلمتين «متناظر» و«متوسّط»)، ونرمز إلى نقطة تقاطعها مع BC بـ L.



المتوسّط AM (متقطّع)، المنصّف AT (رماديّ)، و**السيميديان** AL. الزاويتان المعلّمتان φ متساويتان: المتوسّط والسيميديان متناظران بالنسبة للمنصّف.

سنستعمل الرموز: $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$، S مساحة المثلث، وd_a, d_b, d_c أبعاد نقطة عن المستقيمات $BC,\ CA,\ AB$.

المبرهنة

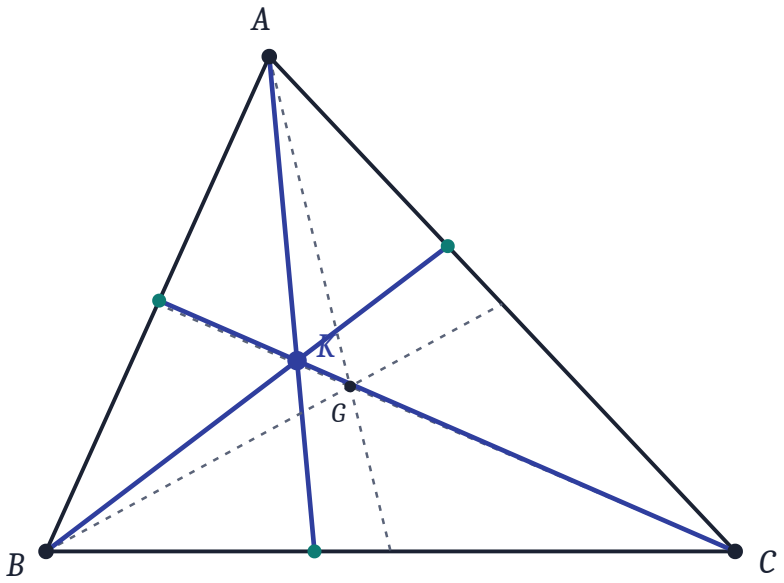
السيميديانات ونقطة لوموان

(1) السيميديان من A يقسم الضلع BC بنسبة مربّعَي الضلعين المجاورين:

$$\boxed{\frac{BL}{LC} = \frac{c^2}{b^2}}$$

(2) السيميديانات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة K — **نقطة لوموان** — وأبعادها عن الأضلاع تتناسب مع أطوال الأضلاع:

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c, \qquad \text{أي} \qquad d_a = \frac{2S\,a}{a^2 + b^2 + c^2}$$ و.ل.ث.م.



السيميديانات تلتقي في K. المتوسّطات (رماديّة متقطّعة) تلتقي في مركز الثقل G — نقطة مختلفة.

ملاحظة: في المثلث المتساوي الساقين $AB = AC$ ينطبق المتوسّط من A على المنصّف، فينطبق عليه السيميديان أيضًا. وفي المثلث المتساوي الأضلاع تنطبق كلّها، وK هي مركز المثلث. في كلّ مثلث آخر K نقطة جديدة.

لمحة تاريخية

تحمل النقطة اسم المهندس والرياضيّ الفرنسيّ إميل لوموان (1840–1912)، الذي عرض خصائصها عام 1873 في مؤتمر الجمعية الفرنسية لتقدّم العلوم في ليون. كان هذا العمل من البدايات التي جعلت «هندسة المثلث» مجالًا نشيطًا في أواخر القرن التاسع عشر، واكتُشفت بعده نقاط ودوائر كثيرة جديدة في المثلث — منها دائرتا لوموان.

لكنّ النقطة كانت معروفة قبله: في ألمانيا تُسمّى أيضًا «نقطة غريبه»، على اسم إرنست فيلهلم غريبه الذي كتب عنها عام 1847. أمّا اسم «سيميديان» (symmedian) فاقترحه الرياضيّ الفرنسيّ موريس دوكاني.

البرهان

1 نسبة أيّ قطعة بالجيوب

لتكن AX قطعة من A إلى BC، تصنع زاوية α مع AB وزاوية β مع AC. للمثلثين ABX وAXC الارتفاع نفسه من A، لذا نسبة قاعدتيهما هي نسبة مساحتيهما. ونحسب كلّ مساحة بصيغة «نصف حاصل ضرب ضلعين في جيب الزاوية بينهما»:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{ABX}}{S_{AXC}} = \frac{\tfrac{1}{2}\,c \cdot AX \sin\alpha}{\tfrac{1}{2}\,b \cdot AX \sin\beta} = \frac{c\sin\alpha}{b\sin\beta}.$$

2 المتوسّط

للمتوسّط AM النسبة 1. إذا كانت زاويتاه α_m (مع AB) وβ_m (مع AC) فإنّ

$$1 = \frac{c\sin\alpha_m}{b\sin\beta_m} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sin\alpha_m}{\sin\beta_m} = \frac{b}{c}.$$

3 السيميديان: الزاويتان تتبادلان

الانعكاس حول المنصّف يبادل بين الزاويتين: السيميديان يصنع الزاوية β_m مع AB والزاوية α_m مع AC. وفق الخطوة 1:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c\sin\beta_m}{b\sin\alpha_m} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}.$$

4 التلاقي — بمبرهنة تشيفا

بالطريقة نفسها للسيميديانين الآخرين، والضرب يعطي

$$\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} = 1,$$

ووفق عكس مبرهنة تشيفا تلتقي السيميديانات الثلاثة في نقطة واحدة K.

5 الأبعاد عن الأضلاع

لنقطة X على السيميديان من A: بُعدها عن AB هو $AX\sin\beta_m$، وبُعدها عن AC هو $AX\sin\alpha_m$. النسبة بينهما $\frac{\sin\beta_m}{\sin\alpha_m}=\frac{c}{b}$. إذن كلّ نقطة على السيميديان من A — وبالأخصّ K — تحقّق $d_c:d_b=c:b$. ومن السيميديان من B: $d_a:d_c=a:c$. معًا:

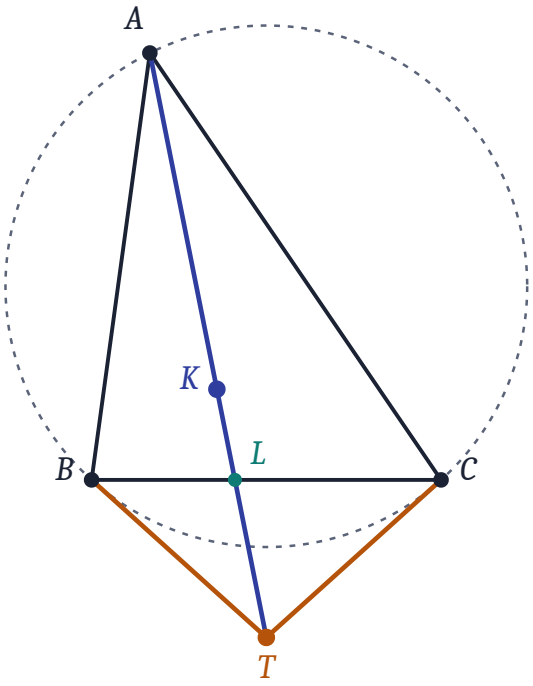
$$d_a:d_b:d_c=a:b:c.$$

لإيجاد القيم نكتب $d_a=ka,\ d_b=kb,\ d_c=kc$، ونقسم المثلث إلى ثلاثة مثلثات رأسها المشترك K: $2S=a\,d_a+b\,d_b+c\,d_c=k(a^2+b^2+c^2)$. ومن هنا $k=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$. ■

صلات جميلة

المماسّان للدائرة المحيطة

نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث، والمماسّين لها في B وفي C. يلتقي المماسّان في نقطة T. **المستقيم AT هو السيميديان من A.**



المماسّان في B وفي C يلتقيان في T، والمستقيم AT يمرّ بنقطة لوموان K.

البرهان. ليقطع AT الضلع BC في L. وفق مبرهنة الزاوية بين المماسّ والوتر $\angle CBT = \angle A$، لذا $\angle ABT = B + A = 180^\circ - C$، و$\sin\angle ABT = \sin C$. وبالمثل $\sin\angle ACT = \sin B$. المماسّان من T متساويان: $BT = CT$. بالطريقة نفسها كما في الخطوة 1 (المثلثان ABT وACT لهما القاعدة المشتركة AT):

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{ABT}}{S_{ACT}} = \frac{\frac{1}{2}\,c\cdot BT\sin C}{\frac{1}{2}\,b\cdot CT\sin B} = \frac{c\sin C}{b\sin B} = \frac{c^2}{b^2},$$

والمساواة الأخيرة من قانون الجيوب ($\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$). إذن L هي نقطة السيميديان. ■

لهذه الخاصّية نتيجة جميلة في مقالة نقطة جيرغون: نقطة جيرغون لمثلث هي نقطة لوموان لمثلث نقاط التماسّ مع دائرته الداخلية.

أقرب نقطة إلى الأضلاع الثلاثة «معًا»

من بين كلّ النقاط داخل المثلث، لأيّ نقطة يكون مجموع مربّعات الأبعاد $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$ أصغر ما يمكن؟ لكلّ نقطة داخلية $a\,d_a + b\,d_b + c\,d_c = 2S$ (قسّموا المثلث إلى ثلاثة). ووفق متباينة كوشي–شفارتس

$$(2S)^2 = (a\,d_a + b\,d_b + c\,d_c)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2),$$

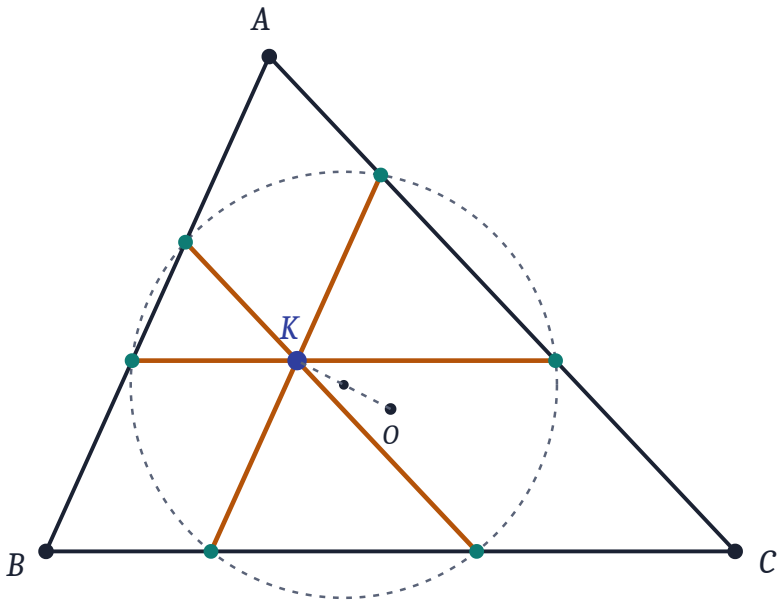
لذا $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \ge \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$، والمساواة تتحقّق بالضبط عندما $d_a : d_b : d_c = a : b : c$ — أي في نقطة لوموان. فنقطة لوموان هي «أفضل حلّ وسط» بين الأضلاع الثلاثة.

دائرتا لوموان

نرسم عبر K ثلاثة مستقيمات موازية للأضلاع. كلّ مستقيم يقطع الضلعين الآخرين، فنحصل على ستّ نقاط.

دائرة لوموان الأولى

النقاط الستّ التي تقطع فيها الموازياتُ للأضلاع المارّةُ بـ K أضلاعَ المثلث تقع على دائرة واحدة، ومركزها منتصف القطعة OK (O مركز الدائرة المحيطة).



ثلاثة موازيات للأضلاع عبر K، و**النقاط الستّ** على دائرة لوموان الأولى. النقطة الصغيرة في منتصف OK هي مركزها.

فكرة البرهان. القطعة التي طرفاها على AB وAC وتصنع مع الضلعين زاويتين «مقلوبتين» ($\angle C$ عند AB و$\angle B$ عند AC) تُسمّى **موازيًا عكسيًّا** للضلع BC. الانعكاس حول المنصّف يحوّل الموازيات لـ BC إلى موازيات عكسيّة، والمتوسّط (الذي ينصّف كلّ موازٍ لـ BC) إلى السيميديان. لذا **السيميديان ينصّف كلّ موازٍ عكسيّ لـ BC.**

الموازي لـ CA عبر K يقطع AB في R، والموازي لـ AB عبر K يقطع AC في W. الشكل $ARKW$ متوازي أضلاع، وقطره AK ينصّف القطر الآخر RW. وبما أنّ AK سيميديان، فـ RW موازٍ عكسيّ لـ BC.

الموازي لـ BC عبر K يقطع AB, AC في P, Q. قطعة موازية و«قطعة موازية عكسيًّا» بين ضلعَي زاوية تقطعانهما في أربع نقاط على دائرة (الرباعي $PQWR$ دائريّ لأنّ $\angle ARW = \angle C = \angle AQP$). إذن

عند كلّ رأس تقع أربع من النقاط الستّ على دائرة.
إذا كانت الدوائر الثلاث مختلفة، فالمحور الأساسيّ لكلّ اثنتين منها هو ضلع من أضلاع المثلث (عليه نقطتاهما المشتركتان). لكنّ المحاور الأساسية الثلاثة لثلاث دوائر تلتقي في نقطة أو تكون متوازية — وأضلاع المثلث ليست كذلك. إذن الدوائر الثلاث دائرة واحدة.

وإذا رسمنا عبر K **موازيات عكسيّة** للأضلاع بدل الموازيات، نحصل على ستّ نقاط أخرى على دائرة — **دائرة لوموان الثانية**، ومركزها K نفسها. (السبب: كلّ موازٍ عكسيّ عبر K ينصّفه السيميديان، أي أنّ K منتصفه؛ ويمكن إثبات أنّ الموازيات العكسيّة الثلاثة متساوية الطول.) تُسمّى هذه الدائرة أحيانًا «دائرة جيوب التمام». جرّبوها في المختبر بالزرّ الثاني.

مثال عدديّ: المثلث 13–14–15

في المثلث الذي أطوال أضلاعه $a = 14,\ b = 15,\ c = 13$ المساحة $S = 84$،
و$a^2 + b^2 + c^2 = 196 + 225 + 169 = 590$.

السيميديان من A يقسم BC بالنسبة $BL : LC = 169 : 225$، لذا $BL = 14 \cdot \frac{169}{394} = \frac{1183}{197} \approx 6.01$. (للمقارنة: المتوسّط عند 7، والمنصّف عند $14 \cdot \frac{13}{28} = 6.5$.)
أبعاد K عن الأضلاع: $k = \frac{2 \cdot 84}{590} = \frac{84}{295}$، لذا

$$d_a = \frac{1176}{295} \approx 3.99, \qquad d_b = \frac{1260}{295} \approx 4.27, \qquad d_c = \frac{1092}{295} \approx 3.70.$$

النقطة	d_a	d_b	d_c	$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$
نقطة لوموان K	3.99	4.27	3.70	47.84
مركز الثقل G	4	3.73	4.31	48.49

(أبعاد مركز الثقل هي ثلث الارتفاعات: $\frac{2S}{3a}$ وهكذا.) كما وعدنا: مجموع المربّعات عند K هو $\frac{4 \cdot 84^2}{590} \approx 47.84$، وهو الأصغر.

تمرين للقرّاء: المثلث القائم الزاوية

تمرين

في المثلث ABC الزاوية C قائمة، وCH هو الارتفاع إلى الوتر. برهنوا أنّ نقطة لوموان هي منتصف الارتفاع CH.

تلميح

ضعوا المثلث في هيئة محاور: $C=(0,0)$، $A=(b,0)$، $B=(0,a)$. بُعدا K عن الضلعين القائمين هما إحداثيّاها. استعملوا $d_a : d_b : d_c = a : b : c$. وبديلًا: ما هو الموازي العكسيّ للوتر AB المارّ بـ C؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

حلّ بالإحداثيّات. d_a هو البعد عن CB (محور y)، أي الإحداثيّ x للنقطة K، وd_b هو البعد عن CA (محور x)، أي الإحداثيّ y. وفق المبرهنة $d_a = ka,\ d_b = kb$ حيث $k = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2} = \frac{ab}{2c^2}$ (لأنّ $2S = ab$ و$a^2+b^2=c^2$). إذن

$$K = \left(\frac{a^2 b}{2c^2},\ \frac{ab^2}{2c^2}\right).$$

معادلة الوتر $ax + by = ab$، والعمود عليه من C في اتّجاه (a,b). موقع العمود $H = t(a,b)$ يحقّق $t(a^2+b^2) = ab$، أي $t = \frac{ab}{c^2}$ و$H = \left(\frac{a^2b}{c^2}, \frac{ab^2}{c^2}\right)$. إذن $K = \frac{1}{2}H$ — منتصف CH. ■

حلّ هندسيّ. في المثلث القائم المتوسّط إلى الوتر يساوي نصف الوتر: $MC = MA$، لذا $\angle MCA = \angle A$. ومن جهة أخرى $\angle HCB = 90^\circ - B = \angle A$. إذن CH يصنع مع CB الزاوية نفسها التي يصنعها المتوسّط CM مع CA: CH هو **السيميديان من** C، وK تقع عليه.

بقي أن نجد موقعها على CH. بما أنّ $CH \perp AB$ فإنّ $d_c = KH$، وبُعد K عن CB هو $d_a = CK \sin \angle HCB = CK \sin A = CK \cdot \frac{a}{c}$. وفق المبرهنة $d_a = ka$ و$d_c = kc$، لذا $CK \cdot \frac{a}{c} = ka$، أي $CK = kc = KH$. إذن K منتصف CH. ■

المراجع

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover (reprint of *Modern Geometry*, 1929).

R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, 1995.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.

الأستاذ خالد خطيب · نقطة لوموان ودائرتا لوموان