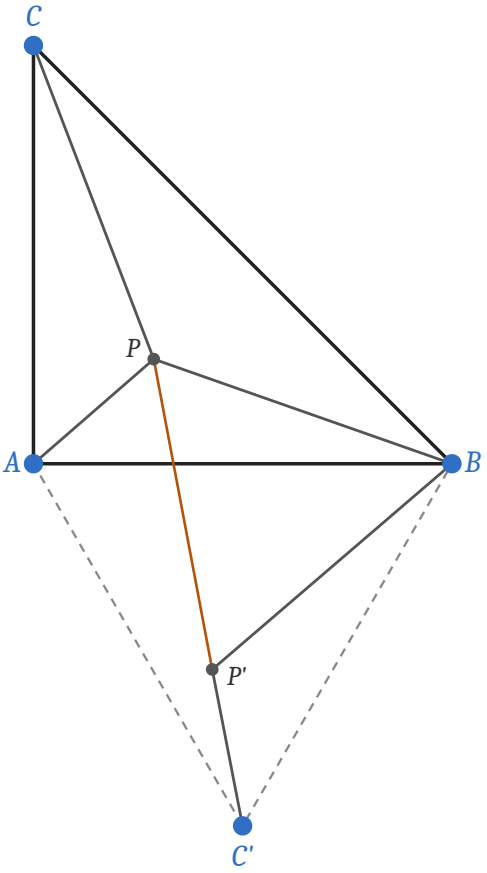
نقطة فيرما – الهندسة المستوية

5 وحدات رياضيات

في مثلث كلّ زواياه أصغر من 120° توجد نقطة وحيدة F يكون مجموع أبعادها عن الرؤوس $PA+PB+PC$ أصغر ما يمكن، وتُرى منها الأضلاع الثلاثة بزاوية 120°. تُسمّى **نقطة فيرما**.



برهان النظرية:

- P نقطة داخل المثلث ABC.
- ABC' مثلث متساوي الأضلاع مبنيّ على الضلع AB خارج المثلث ABC.
- P' نقطة تحقّق $BP'=BP$ و$\angle PBP'=60^\circ$، وتقع في جهة C' (انظر الرسم). عندئذٍ $\angle ABP=\angle C'BP'$ (كلّ منهما يساوي $60^\circ-\angle ABP'$).

أ) برهن أنّ المثلث BPP' متساوي الأضلاع.

ب) برهن أنّ $\triangle ABP\cong\triangle C'BP'$، واستنتج أنّ $PA=P'C'$.

ت) برهن أنّ $PA+PB+PC=C'P'+P'P+PC$، واستنتج أنّ $PA+PB+PC\geq CC'$.

ث) نفرض أنّ النقاط $C',\ P',\ P,\ C$ تقع على مستقيم واحد بهذا الترتيب. برهن أنّ $\angle BPC=\angle APB=\angle APC=120^\circ$.

معطى مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين ABC: $\angle A=90^\circ$، $AB=AC=4$.

ج) (1) احسب $\angle CAC'$ وCC'.

(2) ما هي أصغر قيمة لـ $PA+PB+PC$ لنقطة P داخل المثلث؟

* * *

ح) نبني خارج المثلث ABC أيضًا المثلث المتساوي الأضلاع BCA'. برهن أنّ $AA'=CC'$.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب