مقالة في الهندسة

نقطة فيرما

أين نبني محطّة واحدة لثلاث مدن؟

ثلاث مدن تريد أن تبني محطّة مشتركة وأن تصلها بكلّ مدينة بطريق مستقيم. أين نضع المحطّة كي يكون مجموع أطوال الطرق الثلاث أصغر ما يمكن؟ الجواب نقطة مميّزة في المثلث، تُرى منها الأضلاع الثلاثة بالزاوية نفسها تمامًا: $120°$. وبرهان ذلك كلّه دوران واحد بزاوية $60°$.

الأستاذ خالد خطيب

لنقطتين فقط السؤال سهل: كلّ نقطة على القطعة AB تعطي المجموع الأصغر $PA + PB = AB$. مع ثلاث نقاط A, B, C لم يعد الأمر واضحًا. هل الجواب مركز الثقل؟ مركز الدائرة الداخلية؟ أحد الرؤوس؟ لا شيء من ذلك في الحالة العامّة. النقطة الصحيحة تُعرف باسم **نقطة فيرما**، ولها وصف هندسيّ أنيق.

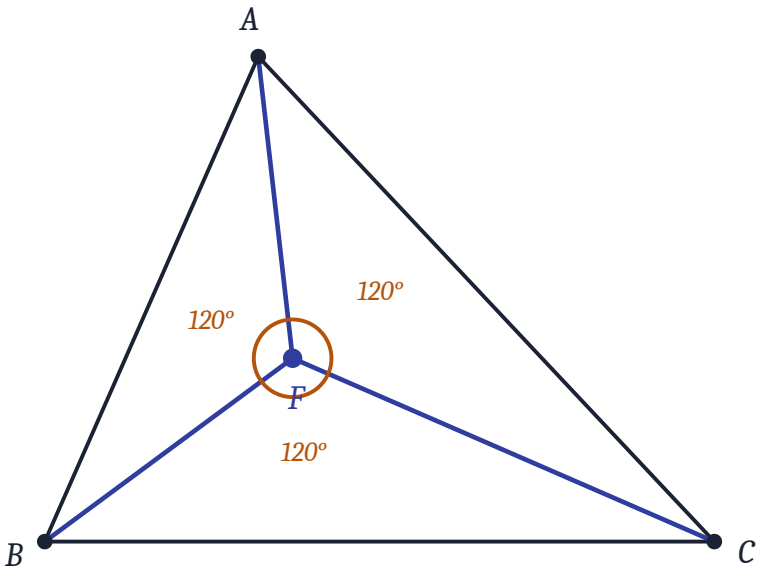
المبرهنة

نقطة فيرما

ليكن ABC مثلثًا كلّ زواياه أصغر من $120°$. توجد داخله نقطة وحيدة F تتحقّق فيها

$$\boxed{\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°}$$

ولكلّ نقطة P في المستوى: $PA + PB + PC \geq FA + FB + FC$، والمساواة فقط عندما $P = F$.



من **نقطة فيرما** F تُرى الأضلاع الثلاثة بزوايا متساوية، $120°$ لكلّ منها. مجموع الأطوال الزرقاء هو الأصغر بين كلّ نقاط المستوى.

ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا المثلث $120°$ أو أكبر، فلا توجد داخله نقطة كهذه، والمجموع الأصغر يتحقّق في **رأس الزاوية الكبيرة نفسه**. سنرى ذلك في المختبر.

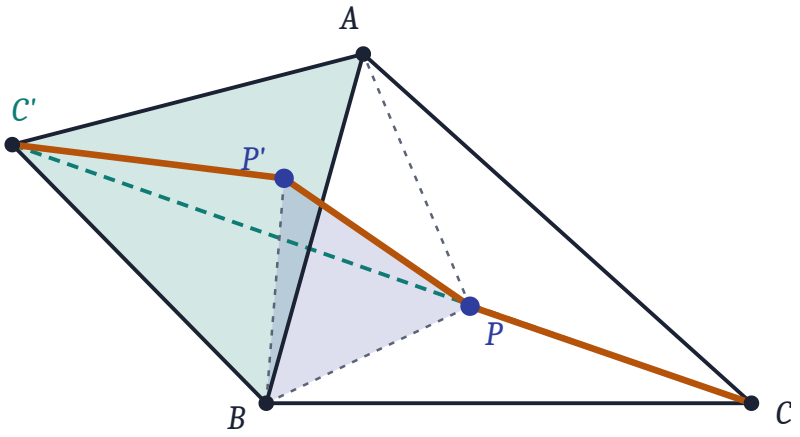
لمحة تاريخية

طرح بيير دي فيرما (1601–1665)، القاضي الفرنسيّ الذي اشتهر بأعماله في نظرية الأعداد وبمبرهنته الأخيرة، هذه المسألة في القرن السابع عشر كتحدٍّ لزملائه: إيجاد النقطة التي يكون مجموع أبعادها عن ثلاث نقاط معطاة أصغر ما يمكن. حلّها الإيطاليّ إيفانجيليستا توريشيلّي، تلميذ غاليليو، ولذلك تُسمّى النقطة أيضًا **نقطة فيرما–توريشيلّي**.

البناء بواسطة ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع، الذي سنراه في هذه المقالة، يُنسب إلى الإنجليزيّ توماس سمبسون في القرن الثامن عشر. وفي القرن العشرين صارت المسألة نقطة انطلاق لفرع كامل في الرياضيات التطبيقية: مسائل «أقصر شبكة» تصل بين عدّة مدن (مسألة شتاينر)، ومسائل اختيار موقع مصنع أو مستودع.

برهان بدوران 60°

الفكرة: نحوّل المجموع $PA+PB+PC$ إلى طول **خطّ منكسر** واحد بين نقطتين ثابتتين. وأقصر خطّ بين نقطتين هو القطعة المستقيمة.



ندير حول B بزاوية 60°: ينتقل A إلى C' وP إلى P'. **المثلث** PBP' متساوي الأضلاع، و**الخطّ المنكسر** $C'P'PC$ طوله $PA+PB+PC$. **القطعة** $C'C$ أقصر منه.

1 نبني مثلثًا متساوي الأضلاع

نبني على الضلع AB، من الخارج، المثلث المتساوي الأضلاع ABC'. الدوران حول B بزاوية 60° (في الاتّجاه المناسب) ينقل A إلى C'. لتكن P' صورة النقطة P بهذا الدوران.

2 نترجم الأطوال الثلاثة

الدوران يحافظ على الأطوال، لذا $P'C'=PA$. وأيضًا $BP'=BP$ والزاوية $\angle PBP'=60^\circ$، لذا المثلث PBP' متساوي الساقين بزاوية رأس 60° — أي متساوي الأضلاع، و$PP'=PB$.

إذن

$$PA+PB+PC=C'P'+P'P+PC.$$

3 **أقصر طريق**

الطرف الأيمن هو طول الخطّ المنكسر $C \to P \to P' \to C'$. النقطتان C وC' لا تتعلّقان بـ P، وأقصر طريق بينهما هو القطعة المستقيمة. إذن لكلّ نقطة P:

$$PA + PB + PC \geq CC'.$$

4 **متى تتحقّق المساواة؟**

فقط عندما تقع C, P, P', C' بهذا الترتيب على مستقيم واحد. عندئذٍ $\angle BPC = 180^\circ - \angle BPP' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. وبالمثل $\angle BP'C' = 120^\circ$، وهي صورة الزاوية $\angle BPA$ بالدوران، لذا $\angle APB = 120^\circ$ أيضًا. والزاوية الثالثة $\angle CPA = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$. ■

بقي أن نتأكّد أنّ نقطة كهذه موجودة. لتكن F نقطة التقاطع الثانية للقطعة CC' مع الدائرة المارّة بـ A, B, C'. الرباعي $AFBC'$ دائريّ، و$\angle AC'B = 60^\circ$، لذا $\angle AFB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. وفيه أيضًا $\angle BFC' = \angle BAC' = 60^\circ$ (زاويتان محيطيّتان على القوس نفسه)، لذا $\angle BFC = 120^\circ$. الشرط «كلّ الزوايا أصغر من 120°» هو بالضبط ما يضمن أن تقع F داخل المثلث.

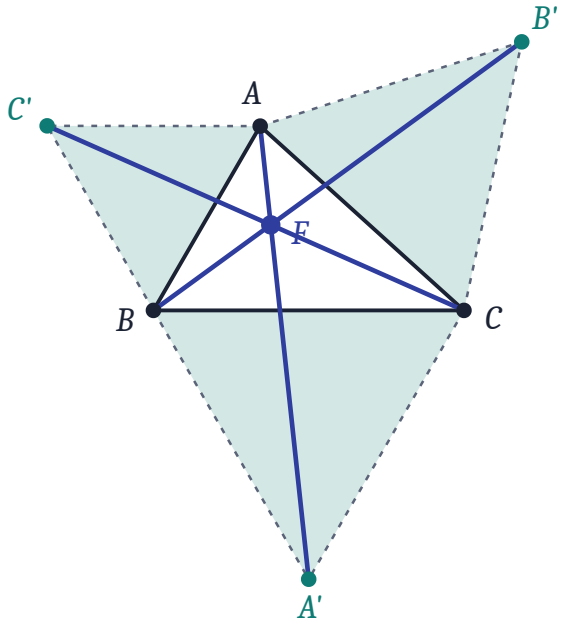
البناء: ثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع

البرهان أعطانا أكثر ممّا طلبنا. لقد بيّن أنّ المجموع الأصغر يساوي CC'، وأنّ نقطة فيرما تقع على القطعة CC'. لكنّ الضلع AB لم يكن مميّزًا في شيء: لو بنينا المثلث المتساوي الأضلاع على BC أو على CA لحصلنا على النتيجة نفسها. إذن:

بناء سمبسون

نبني على أضلاع المثلث، من الخارج، المثلثات المتساوية الأضلاع ABC', CAB', BCA'.
عندئذٍ القطع AA', BB', CC' **تلتقي في نقطة فيرما، وأطوالها متساوية:**

$$AA' = BB' = CC' = FA + FB + FC.$$



القطع AA', BB', CC' متساوية في الطول وتلتقي في نقطة فيرما F — بالزوايا $60°$ بين كلّ اثنتين منها.

ويمكن أيضًا أن نحسب الطول الأصغر بدلالة الأضلاع. في المثلث ACC' الزاوية عند A هي $\angle A + 60°$، ووفق قانون جيوب التمام (مع $\cos(A+60°) = \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$ و$bc\sin A = 2S$ حيث S مساحة المثلث):

$$CC'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A+60°) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2\sqrt{3}\,S.$$

مثال عددي

في المثلث القائم الزاوية الذي أضلاعه $3, 4, 5$، ما هو أصغر مجموع ممكن لأبعاد نقطة عن الرؤوس الثلاثة؟

الحلّ. كلّ الزوايا أصغر من 120° (أكبرها 90°)، والمساحة $S = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$. وفق الصيغة:

$$FA + FB + FC = \qquad (FA+FB+FC)^2 = \frac{9+16+25}{2} + 2\sqrt{3}\cdot 6 = 25 + 12\sqrt{3},$$

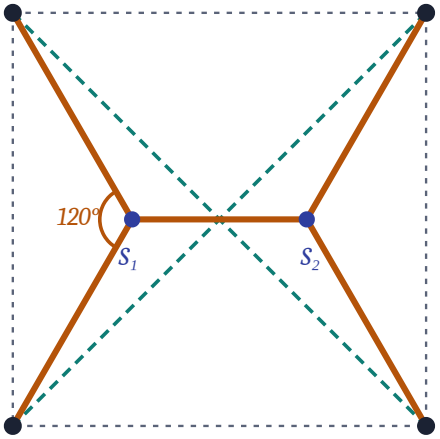
النقطة	مجموع الأبعاد عن الرؤوس
رأس الزاوية القائمة	$3 + 4 = 7$
منتصف الوتر	$2.5 + 2.5 + 2.5 = 7.5$
نقطة فيرما	≈ 6.77

الفرق ليس كبيرًا هنا، لكنّه مضمون: لا توجد نقطة أفضل من F.

تمرين للقرّاء: أربع مدن

تمرين

أربع مدن تقع في رؤوس مربّع طول ضلعه 1 (كيلومتر واحد). نريد شبكة طرق تصل بين كلّ المدن. شبكة القطرين طولها $2\sqrt{2} \approx 2.83$. ابنوا شبكة أقصر: نقطتا تقاطع S_1, S_2 داخل المربّع، تلتقي في كلّ منهما ثلاث طرق بزوايا 120° (كما في نقطة فيرما). برهنوا أنّ طولها $1 + \sqrt{3} \approx 2.73$.



الشبكة بنقطتي التقاء S_1, S_2 أقصر من **القطرين**.

تلميح

ضعوا المربّع في هيئة محاور: $(0,1),(1,1),(1,0),(0,0)$، والنقطتين على المستقيم $y=\frac{1}{2}$. الطريقان من S_1 إلى الرأسين $(0,0)$ و$(0,1)$ متناظران، والزاوية بينهما $120°$، لذا كلّ منهما يصنع زاوية $60°$ مع المستقيم $y=\frac{1}{2}$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

لتكن $S_1=(t,\frac{1}{2})$. الطريق من S_1 إلى $(0,0)$ يصنع زاوية $60°$ مع الأفقيّ، لذا $\tan 60° = \frac{1/2}{t}$، أي $t=\frac{1}{2\sqrt{3}}$، وطوله $\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

بالتناظر $S_2=(1-t,\frac{1}{2})$. في الشبكة أربعة طرق مائلة طول كلّ منها $\frac{1}{\sqrt{3}}$، وطريق أوسط طوله $1-2t=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. المجموع:

$$4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}\approx 2.732<2.828\approx 2\sqrt{2}.$$

وفي كلّ من S_1, S_2 الزوايا الثلاث $120°$: الزاوية بين الطريقين المائلين $2\cdot 60°=120°$، والطريق الأفقيّ يصنع مع كلّ منهما $180°-60°=120°$. ■

يمكن البرهان أنّ هذه هي أقصر شبكة ممكنة بين رؤوس المربّع — وهذا مثال على «شجرة شتاينر».
لاحظوا المفارقة: الشبكة الأقصر ليست متناظرة كالمربّع نفسه، فهناك نسختان منها (أفقيّة وعموديّة).

المراجع

H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd ed., Wiley, 1969.

R. Courant, H. Robbins, *What Is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941, ch. VII (Steiner's problem).

الأستاذ خالد خطيب · نقطة فيرما