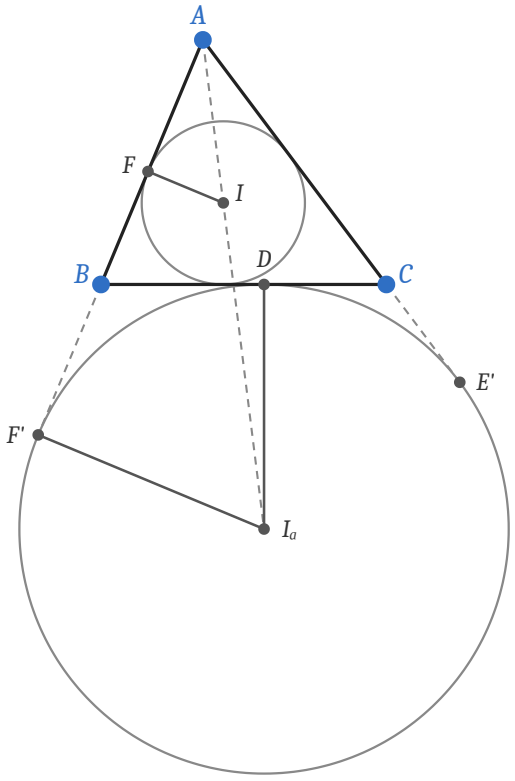
الدوائر الخارجية للمثلث – الهندسة المستوية

5 وحدات رياضيات

لكلّ مثلث، إلى جانب الدائرة المحصورة داخل المثلث، ثلاث **دوائر خارجية**: كلّ واحدة منها تمسّ ضلعًا واحدًا من الخارج وتمسّ امتدادَي الضلعين الآخرين. أنصاف أقطارها مرتبطة بمساحة المثلث بعلاقات بسيطة.



الرموز: في المثلث ABC:

- $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$، و$s = \frac{a+b+c}{2}$ نصف المحيط، وS مساحة المثلث.
- I مركز الدائرة المحصورة داخل المثلث ونصف قطرها r؛ تمسّ AB في F.
- I_a مركز الدائرة الخارجية المقابلة للرأس A ونصف قطرها r_a؛ تمسّ BC في D، وامتداد AB في F'، وامتداد AC في E'.
- $r_b,\ r_c$ نصفا قطرَي الدائرتين الخارجيتين المقابلتين لـ B وC.

أ) برهن أنّ I_a تقع على منصّف الزاوية $\angle BAC$.

ب) برهن أنّ $AF' = AE' = s$، واستنتج أنّ $BD = s - c$ و$CD = s - b$.

ت) بيّن أنّ $S = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a}$، واستنتج أنّ $r_a = \dfrac{S}{s-a}$.

ث) معطى أنّ $r = \dfrac{S}{s}$. برهن أنّ $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

معطى مثلث أطوال أضلاعه $a = 21,\ b = 17,\ c = 10$، ومساحته $S = 84$.

ج) (1) احسب $r,\ r_a,\ r_b,\ r_c$.

(2) تحقّق من العلاقة في البند ث.

* * *

ح) معطى أنّ $BF = s - b$.

(1) برهن أنّ $\triangle IFB \sim \triangle BF'I_a$، واستنتج أنّ $r \cdot r_a = (s-b)(s-c)$.

(2) استنتج صيغة هيرون: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب