مقالة في الهندسة

الدوائر الخارجية للمثلث

أربع دوائر تمسّ الأضلاع الثلاثة، وعلاقات مدهشة بين أنصاف أقطارها

نعرف من المدرسة الدائرة الداخلية: الدائرة الوحيدة داخل المثلث التي تمسّ أضلاعه الثلاثة. لكن إذا نظرنا إلى المستقيمات التي تقع عليها الأضلاع، لا إلى الأضلاع نفسها، نكتشف ثلاث دوائر أخرى تمسّها جميعًا — خارج المثلث. أنصاف أقطار هذه الدوائر الأربع مرتبطة ببعضها، وبمساحة المثلث وبدائرته المحيطة، بعلاقات بسيطة وجميلة.

الأستاذ خالد خطيب

ثلاثة مستقيمات تقطع بعضها مثنى مثنى (ولا تمرّ بنقطة واحدة) تقسم المستوى إلى سبع مناطق: المثلث نفسه، وثلاث مناطق «مقابل الرؤوس»، وثلاث مناطق «مقابل الأضلاع». في المثلث تقع الدائرة الداخلية. وفي كلّ منطقة من المناطق الثلاث المقابلة للأضلاع توجد أيضًا دائرة تمسّ المستقيمات الثلاثة. هذه هي **الدوائر الخارجية** للمثلث: كلّ واحدة منها تمسّ ضلعًا واحدًا من الخارج، وتمسّ امتدادَي الضلعين الآخرين.

سنستعمل في المقالة الرموز المعتادة: $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$ أطوال الأضلاع، $s = \frac{a+b+c}{2}$ نصف المحيط، S مساحة المثلث، r نصف قطر الدائرة الداخلية، R نصف قطر الدائرة المحيطة. ونرمز بـ I_a وr_a إلى مركز الدائرة الخارجية المقابلة للرأس A (التي تمسّ الضلع BC) ونصف قطرها، وبالمثل I_b, r_b وI_c, r_c.

المبرهنة

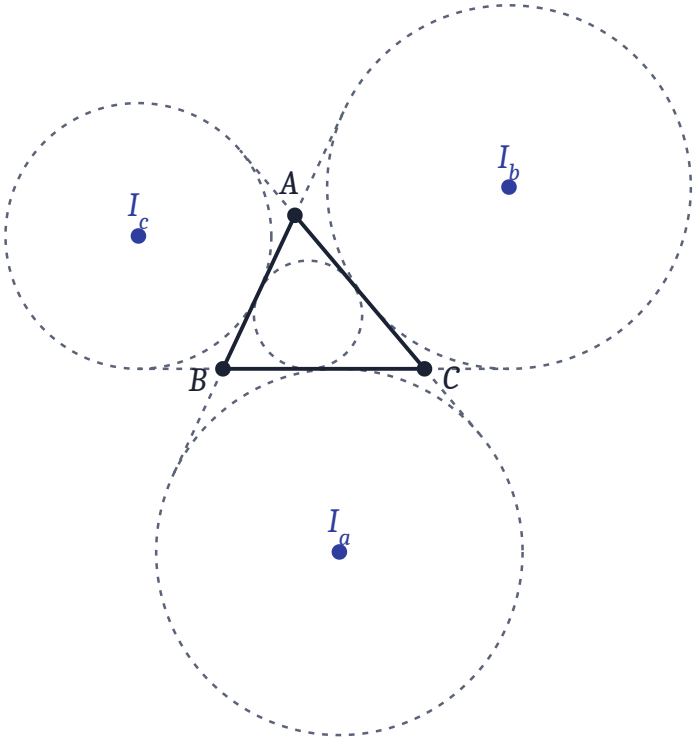
أنصاف أقطار الدوائر الخارجية

لكلّ مثلث ثلاث دوائر خارجية، وأنصاف أقطارها هي

$$\boxed{r_a = \frac{S}{s-a}, \qquad r_b = \frac{S}{s-b}, \qquad r_c = \frac{S}{s-c}}$$

وتربطها بالدائرتين الداخلية والمحيطة العلاقتان

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \qquad r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$



المثلث ABC والدائرة الداخلية الصغيرة، والدوائر الخارجية الثلاث ومراكزها I_a, I_b, I_c. كلّ دائرة خارجية تمسّ ضلعًا واحدًا وامتدادَي الضلعين الآخرين (الامتدادات بخطّ متقطّع).

ملاحظة: قارنوا مع صيغة الدائرة الداخلية المعروفة $r = \frac{S}{s}$. في الدوائر الخارجية يُستبدل s بـ $s-a$ أو $s-b$ أو $s-c$. وبما أنّ $s-a < s$، فكلّ دائرة خارجية أكبر من الدائرة الداخلية — وأكبرها هي المقابلة لأطول ضلع.

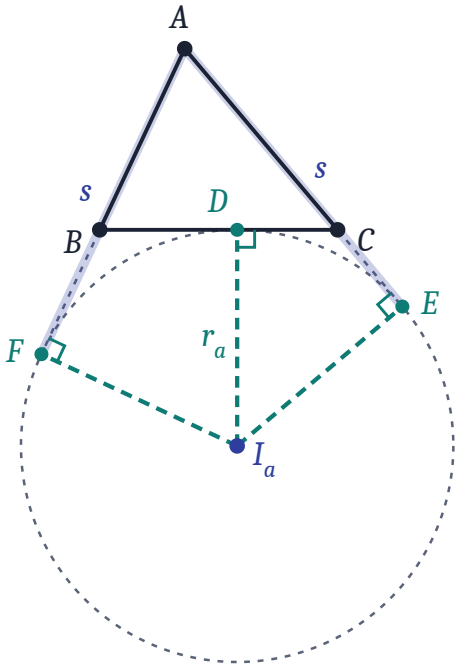
لمحة تاريخية

تظهر الدائرة الداخلية والمنصّفات منذ «الأصول» لإقليدس، لكنّ الدوائر الخارجية نالت اهتمامًا خاصًّا في القرن التاسع عشر، حين ازدهرت «هندسة المثلث» واكتُشفت فيه نقاط ودوائر جديدة كثيرة. أشهر النتائج المتعلّقة بها نشرها الرياضيّ الألمانيّ كارل فيلهلم فويرباخ (1800–1834) عام 1822: دائرة النقاط التسع في المثلث تمسّ الدائرة الداخلية وتمسّ الدوائر الخارجية الثلاث. هذه المبرهنة، التي تُعرف اليوم باسم مبرهنة فويرباخ، تُعدّ من أجمل نتائج الهندسة المستوية.

وفي مقالة مبرهنة تشيفا التقينا بالدوائر الخارجية من قبل: القطع التي تصل الرؤوس بنقاط تماسّها مع الأضلاع تلتقي في نقطة واحدة — نقطة ناغل.

البرهان

نبرهن أوّلًا أنّ الدوائر الخارجية موجودة، ثم نحسب أطوال المماسّات، ثم أنصاف الأقطار. يكفي أن نعالج الدائرة المقابلة لـ A؛ الدائرتان الأخريان بالطريقة نفسها.



الدائرة الخارجية المقابلة لـ A تمسّ BC في D، وامتداد AC في E، وامتداد AB في F. **المماسّان من A** طول كلّ منهما يساوي نصف المحيط s.

1 المركز: منصّفان خارجيّان ومنصّف داخليّ

النقاط المتساوية البعد عن مستقيمين متقاطعين تقع على منصّفَي الزاويتين بينهما. لنأخذ نقطة تقاطع منصّف الزاوية الخارجية عند B ومنصّف الزاوية الخارجية عند C، ونسمّها I_a. بُعدها عن المستقيم AB يساوي بُعدها عن BC (لأنّها على منصّف عند B)، وبُعدها عن BC يساوي بُعدها عن CA (لأنّها على منصّف عند C). إذن I_a متساوية البعد عن المستقيمات الثلاثة، والدائرة التي مركزها I_a ونصف قطرها هذا البعد تمسّ الثلاثة.

بما أنّ I_a متساوية البعد عن AB وAC وتقع داخل الزاوية A، فهي على **المنصّف الداخليّ** للزاوية A. أي أنّ مركز كلّ دائرة خارجية هو نقطة تلاقي منصّف داخليّ واحد ومنصّفين خارجيّين.

2 المماسّات من A طولها s

مماسّان من نقطة واحدة إلى دائرة متساويان. لذا $BF = BD$ و$CE = CD$ و$AF = AE$. نجمع:

$$AF + AE = (c + BF) + (b + CE) = b + c + BD + DC = a + b + c = 2s.$$

إذن $AF = AE = s$، ومن هنا $BD = BF = s - c$ و$CD = CE = s - b$.

3 نصف القطر من المساحة

نصل I_a بالرؤوس. المثلث ABC هو «الرباعي» ABI_aC مطروحًا منه المثلث BI_aC. ارتفاعات المثلثات ABI_a وACI_a وBCI_a النازلة من I_a كلّها تساوي r_a، لذا

$$S = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a} = \frac{c\,r_a}{2} + \frac{b\,r_a}{2} - \frac{a\,r_a}{2} = r_a \cdot \frac{b+c-a}{2} = r_a(s-$$

ومن هنا $r_a = \frac{S}{s-a}$. ■

4 مجموع المقلوبات

من الصيغ الثلاث:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{S} = \frac{3s-2s}{S} = \frac{s}{S} = \frac{1}{r}. \qquad \blacksquare$$

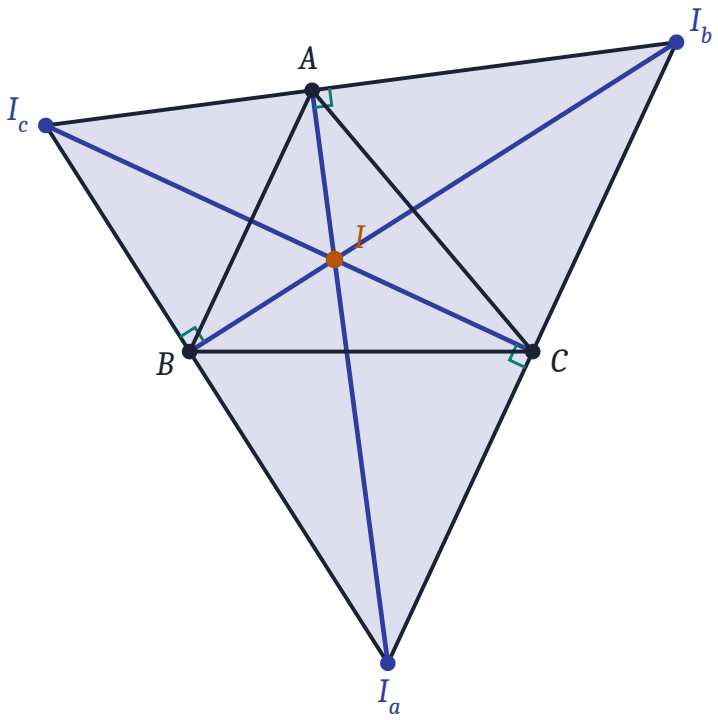
أمّا العلاقة $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ فبرهانها أطول، ويعتمد على حساب جبريّ بالصيغة $R = \frac{abc}{4S}$ وصيغة هيرون. يمكنكم التحقّق منها في المختبر، وفي المثال العدديّ أدناه.

صلات جميلة

مثلث المراكز الخارجية

عند كلّ رأس يتعامد المنصّف الداخليّ والمنصّف الخارجيّ (مجموع الزاويتين اللتين ينصّفانهما $180°$، فمجموع نصفيهما $90°$). المركزان I_b وI_c يقعان كلاهما على المنصّف الخارجيّ عند A، والمركز I_a يقع على المنصّف الداخليّ عند A. إذن المستقيم AI_a عموديّ على الضلع I_bI_c للمثلث $I_aI_bI_c$ — أي أنّه ارتفاع فيه!

وبالطريقة نفسها BI_b وCI_c ارتفاعان. والارتفاعات الثلاثة هي المنصّفات الداخلية للمثلث ABC، التي تلتقي في المركز الداخليّ I. النتيجة: **المركز الداخليّ للمثلث هو نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث المراكز الخارجية**، والمثلث ABC هو «مثلث مواقع الارتفاعات» فيه.



المثلث $I_aI_bI_c$ (المظلّل). المنصّفات الداخلية للمثلث ABC هي ارتفاعاته، وتلتقي في I.

برهان لصيغة هيرون

لتمسّ الدائرة الداخلية الضلع AB في F_0، ولتمسّ الدائرة الخارجية المقابلة لـ A امتداد AB في F (كما في الرسم الثاني). نعرف أنّ $AF_0 = s - a$ و$BF_0 = s - b$، و$AF = s$ و$BF = s - c$.

المثلثان القائمان AF_0I وAFI_a متشابهان (الزاوية $\frac{A}{2}$ مشتركة)، لذا $\frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s}$.
المنصّفان الداخليّ والخارجيّ عند B متعامدان، لذا $\angle IBF_0 + \angle I_aBF = 90°$، والمثلثان القائمان IF_0B وBFI_a متشابهان. لذا $\frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a}$، أي $r \cdot r_a = (s-b)(s-c)$.

نضرب المساواتين: $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$. وبما أنّ $S = rs$:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

— وهذه صيغة هيرون، التي حصلنا عليها من دائرتين فقط وتشابه مثلثات.

مثال عدديّ: المثلث 13–14–15

في المثلث الذي أطوال أضلاعه $a=14,\ b=15,\ c=13$: نصف المحيط $s=21$، ووفق صيغة هيرون $S=\sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8}=84$. إذن

$$r=\frac{84}{21}=4,\qquad r_a=\frac{84}{7}=12,\qquad r_b=\frac{84}{6}=14,\qquad r_c=\frac{84}{8}=10.5,\qquad R=$$

العلاقة	الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{2}{21}=\frac{7+6+8}{84}=\frac{1}{4}$
$r_a+r_b+r_c=4R+r$	$12+14+10.5=36.5$	$\frac{65}{2}+4=36.5$
$r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c=S^2$	$4\cdot 12\cdot 14\cdot 10.5=7056$	$84^2=7056$

العلاقة الأخيرة صحيحة في كلّ مثلث: $r\,r_a r_b r_c=\frac{S^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2$.

تمرين للقرّاء: المثلث القائم الزاوية

تمرين

في المثلث ABC الزاوية C قائمة. برهنوا أنّ

$$r=s-c,\qquad r_a=s-b,\qquad r_b=s-a,\qquad r_c=s,$$

واستنتجوا أنّ $r_a+r_b+r_c=r+2c$. (تحقّقوا من ذلك في المثلث 3–4–5.)

تلميح

الرأس C ونقطتا التماسّ على الضلعين القائمين ومركز الدائرة تكوّن **مربّعًا** — للدائرة الداخلية وللدائرة الخارجية المقابلة لـ C على حدّ سواء. ما طول المماسّ من C إلى كلّ منهما؟ وللدائرتين الأخريين استعملوا العلاقة $r\cdot r_a=(s-b)(s-c)$ من قسم صيغة هيرون.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

الرباعي الذي رؤوسه C، ونقطتا تماسّ الدائرة الداخلية مع CA وCB، والمركز I، فيه ثلاث زوايا قائمة وضلعان متجاوران متساويان (نصفا قطر) — فهو مربّع. لذا r يساوي طول المماسّ من C إلى الدائرة الداخلية، وهو $s - c$.

وبالطريقة نفسها مع الدائرة الخارجية المقابلة لـ C: طول المماسّ من C إليها هو s (الخطوة 2 في البرهان، مع C بدل A)، لذا $r_c = s$.

من العلاقة $r \cdot r_a = (s-b)(s-c)$ ومن $r = s - c$ نحصل على $r_a = s - b$، وبالمثل $r \cdot r_b = (s-a)(s-c)$ إذن $r_b = s - a$.

$$r_a + r_b + r_c = (s-b) + (s-a) + s = 3s - a - b = \frac{a+b+3c}{2} = \frac{a+b-c}{2}.$$

هذا يتّفق مع العلاقة العامّة $r_a + r_b + r_c = 4R + r$: في المثلث القائم الزاوية الوتر قطر في الدائرة المحيطة، لذا $4R = 2c$. وفي المثلث 3–4–5: $s = 6$، لذا $r = 1,\ r_a = 2,\ r_b = 3,\ r_c = 6$، والمجموع $1 + 2 \cdot 5 = 11$.

المراجع

K. W. Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, Nürnberg, 1822.

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover (reprint of *Modern Geometry*, 1929).

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 1.