مقالة في الهندسة

مستقيم أويلر

ثلاثة مراكز للمثلث، ومستقيم واحد يجمعها

نتعلّم في دروس الهندسة ثلاث نقاط مميّزة في المثلث: مركز الثقل، ومركز الدائرة المحيطة، ونقطة تلاقي الارتفاعات. لكلّ منها تعريف مختلف وبرهان وجود مختلف. اكتشف ليونارد أويلر أنّ هذه النقاط الثلاث تقع دائمًا على مستقيم واحد — بل وأنّ المسافة بين اثنتين منها هي دائمًا ضعف المسافة بين اثنتين أخريين.

الأستاذ خالد خطيب

تذكير سريع بالنقاط الثلاث، بالرموز التي سنستعملها في المقالة كلّها:

- G — **مركز الثقل**: نقطة تلاقي المتوسطات. وهي تقسم كلّ متوسط بنسبة $1:2$ من جهة الرأس.
- O — **مركز الدائرة المحيطة**: نقطة تلاقي الأعمدة المنصِّفة للأضلاع، وبعدها عن الرؤوس الثلاثة هو نصف القطر R.
- H — **نقطة تلاقي الارتفاعات**.

لا يوجد في تعريفات هذه النقاط ما يربط إحداها بالأخرى: الأولى تتعلّق بمنتصفات الأضلاع، والثانية بالأبعاد المتساوية، والثالثة بالتعامد. ومع ذلك، ارسموها في أيّ مثلث تشاؤون، وستجدونها على مستقيم واحد.

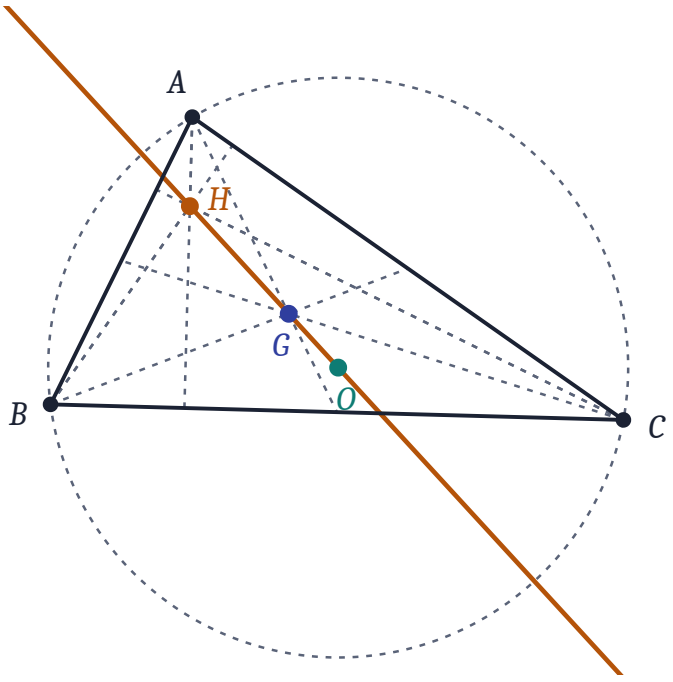
المبرهنة

مبرهنة أويلر

في كلّ مثلث، تقع النقاط O, G, H على مستقيم واحد، والنقطة G بين O وH، و

$$\boxed{GH = 2\,OG}$$

يُسمّى هذا المستقيم **مستقيم أويلر** للمثلث.



O مركز الدائرة المحيطة، G مركز الثقل (المتوسطات بخطّ رفيع)، H نقطة تلاقي الارتفاعات. الثلاث على **مستقيم أويلر**، وG أقرب إلى O بمرّتين.

ملاحظة: في المثلث المتساوي الأضلاع تنطبق النقاط الثلاث على نقطة واحدة، فلا يوجد مستقيم محدَّد — هذه هي الحالة الوحيدة. وانتبهوا: **مركز الدائرة الداخلية** I لا يقع عمومًا على مستقيم أويلر (بعض المصادر تخطئ في ذلك). يقع I عليه فقط إذا كان المثلث متساوي الساقين، وعندئذٍ يكون مستقيم أويلر هو محور التماثل.

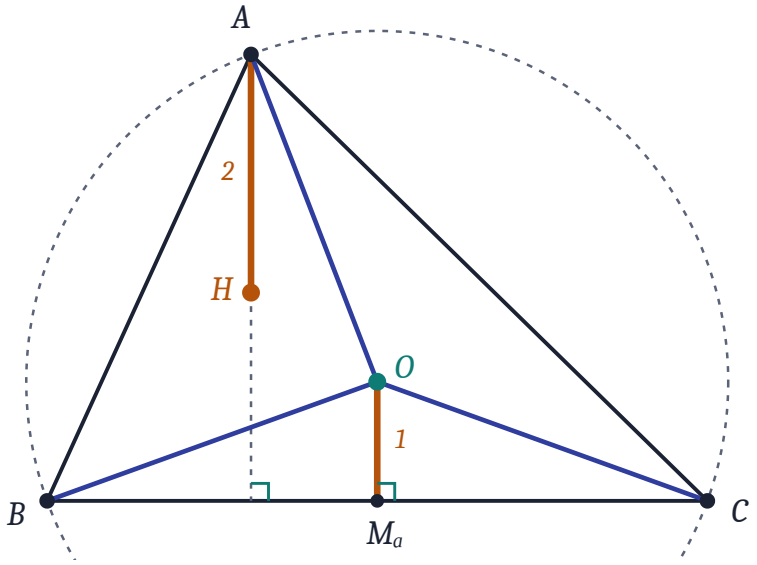
لمحة تاريخية

ليونارد أويلر (1707–1783)، السويسريّ الذي قضى معظم حياته العلمية في سانت بطرسبرغ وبرلين، هو من أغزر الرياضيين إنتاجًا في التاريخ. نشر المبرهنة في بحث عنوانه Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum («حلّ سهل لبعض المسائل الهندسية الصعبة جدًّا»)، صدر في مجلّة أكاديمية سانت بطرسبرغ عام 1767.

لم يكن هدف أويلر في ذلك البحث مستقيمه بالذات، بل سؤالًا آخر: هل يمكن بناء المثلث إذا عرفنا مواقع بعض مراكزه فقط؟ وفي الطريق حسب أويلر المسافات بين المراكز بدلالة أطوال الأضلاع — حسابًا جبريًّا طويلًا — ولاحظ أنّ O, G, H على استقامة واحدة. البرهان الذي نعرضه هنا أقصر بكثير، لكنّه يستعمل أداة لم تكن متاحة لأويلر: المتّجهات.

برهان بالمتّجهات

الفكرة: نضع نقطة الأصل في المكان «الصحيح» — في O — فتصبح نقطة تلاقي الارتفاعات مجرّد مجموع.



نتيجة البرهان بلغة الرسم: **القطعة** AH توازي **القطعة** OM_a (كلتاهما عمودية على BC) وطولها ضعف طولها. **بالأزرق** — المتّجهات من O إلى الرؤوس، وكلّها بطول R.

1 الأصل في مركز الدائرة المحيطة

نرمز إلى متّجهات المواقع من O بأحرف صغيرة: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$، $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$، $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. بما أنّ O مركز الدائرة المحيطة:

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=R.$$

2 نخمّن موقع H

لتكن H' النقطة التي متّجه موقعها $\vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. نحسب حاصل الضرب العدديّ:

$$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{CB}=(\vec{h}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2=R^2-R^2=0.$$

إذن $AH'\perp BC$، أي أنّ H' تقع على الارتفاع النازل من A. وبالطريقة نفسها تمامًا تقع على الارتفاعين الآخرين. لذا $H'=H$:

$$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

3 مركز الثقل

متّجه موقع مركز الثقل هو معدّل متّجهات الرؤوس:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OH}.$$

إذن O,G,H على مستقيم واحد، وG تقع على القطعة OH على ثلث المسافة من O. ومن هنا $OG=\frac{1}{3}OH$، $GH=\frac{2}{3}OH$، أي $GH=2\,OG$. ■

نتيجة على الطريق. من الخطوة 2: $\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\vec{c}=2\,\overrightarrow{OM_a}$، حيث M_a منتصف BC. أي أنّ **بعد الرأس عن نقطة تلاقي الارتفاعات يساوي ضعف بعد مركز الدائرة المحيطة عن الضلع المقابل** — وهي حقيقة جميلة بحدّ ذاتها، يظهرها الرسم أعلاه.

حالات خاصة ونقطة رابعة

1 المثلث القائم الزاوية

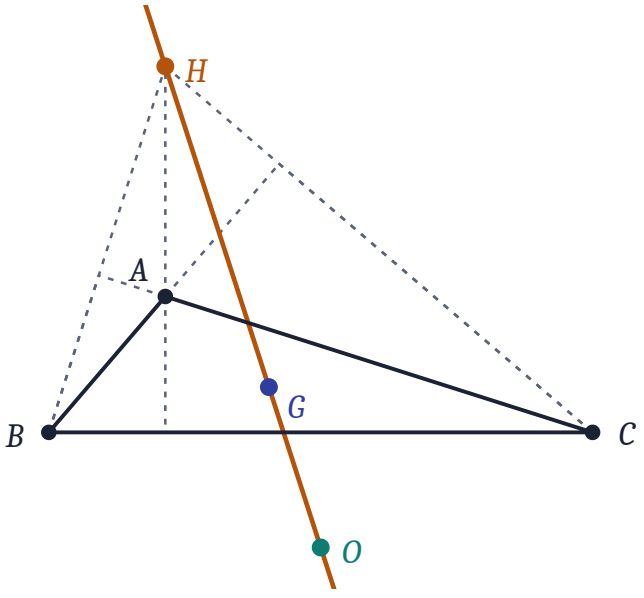
إذا كانت الزاوية القائمة عند C، فإنّ $H = C$ (الضلعان القائمان هما ارتفاعان)، وO منتصف الوتر. لذا مستقيم أويلر هو المتوسط النازل إلى الوتر — ومركز الثقل عليه طبعًا.

2 المثلث المنفرج الزاوية

تقع H وO خارج المثلث (في جهتين مختلفتين)، بينما تبقى G داخله دائمًا. المبرهنة صحيحة بلا تغيير — البرهان بالمتّجهات لم يفترض شيئًا عن الزوايا.

3 مركز دائرة النقاط التسع

النقطة N التي متّجه موقعها $\frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$ هي منتصف القطعة OH، فهي أيضًا على مستقيم أويلر. وهي مركز دائرة مدهشة تمرّ بتسع نقاط مميّزة في المثلث — لها مقالة خاصّة في هذه السلسلة. الترتيب على المستقيم: $O,\ G,\ N,\ H$، والنسب $OG : GN : NH = 2 : 1 : 3$.



في المثلث المنفرج الزاوية تقع O وH خارج المثلث، والنقاط الثلاث تبقى على مستقيم واحد.

مثال عددي

رؤوس المثلث: $A(0,0)$، $B(6,0)$، $C(2,4)$. نجد النقاط الثلاث ونتحقّق من المبرهنة.

مركز الثقل: $G = \left(\frac{0+6+2}{3}, \frac{0+0+4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

مركز الدائرة المحيطة: العمود المنصّف للضلع AB هو $x = 3$. من الشرط $OA = OC$:
$x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2$، أي $4x + 8y = 20$، ومع $x = 3$ نحصل على $y = 1$. إذن $O(3,1)$.

نقطة تلاقي الارتفاعات: الارتفاع من C هو $x = 2$. الارتفاع من A عموديّ على $\overrightarrow{BC} = (-4,4)$، فهو $y = x$. إذن $H(2,2)$.

المستقيم المارّ بـ $O(3,1)$ و$H(2,2)$ هو $x + y = 4$. وبالفعل $\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$، أي أنّ G عليه. وأكثر من ذلك:

$$\overrightarrow{OG} = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \qquad \overrightarrow{GH} = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = 2\,\overrightarrow{OG}.$$

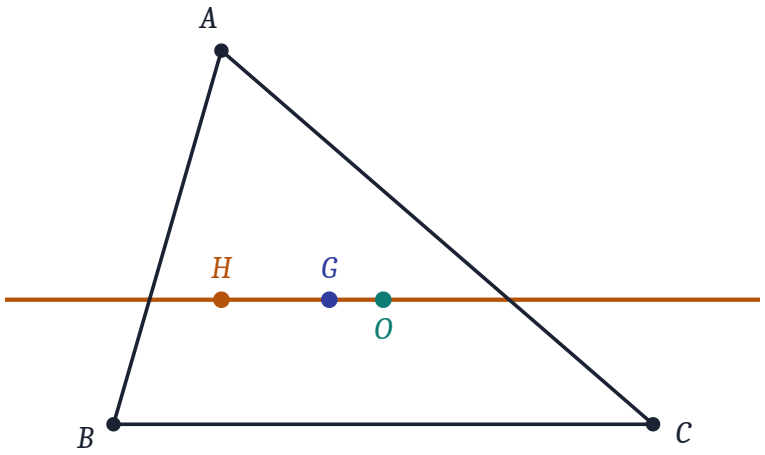
للمقارنة، مركز الدائرة الداخلية في هذا المثلث هو تقريبًا $I(2.41,\ 1.49)$، و$2.41 + 1.49 = 3.90 \neq 4$: إنّه ليس على مستقيم أويلر.

تمرين للقرّاء: متى يوازي مستقيم أويلر ضلعًا؟

تمرين

المثلث ABC ليس متساوي الأضلاع، والزاويتان B وC فيه حادّتان. برهنوا أنّ مستقيم أويلر يوازي الضلع BC إذا وفقط إذا

$$\tan B \cdot \tan C = 3.$$



مثلث فيه $\tan B \cdot \tan C = 3$: **مستقيم أويلر** أفقيّ، يوازي BC.

تلميح

ضعوا المثلث في هيئة محاور: $B(0,0)$، $C(a,0)$، $A(d,h)$ حيث $0 < d < a$ و$h > 0$. مستقيم أويلر يوازي BC إذا وفقط إذا كان لـ G وH الإحداثيّ y نفسه. احسبوا الإحداثيّ y لكلّ منهما، وعبّروا عن $\tan B$ و$\tan C$ بدلالة a, d, h.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

بما أنّ B وC حادّتان، يقع موقع الارتفاع من A داخل BC، لذا يمكن أن نضع $B(0,0)$، $C(a,0)$، $A(d,h)$ حيث $0 < d < a$. في المثلثين القائمين الناتجين عن الارتفاع:

$$\tan B = \frac{h}{d}, \qquad \tan C = \frac{h}{a-d}.$$

مركز الثقل: $y_G = \frac{h}{3}$. نقطة تلاقي الارتفاعات تقع على الارتفاع $x = d$، وعلى الارتفاع من B العموديّ على $\overrightarrow{CA} = (d-a,\ h)$، أي على المستقيم $(d-a)x + hy = 0$. نعوّض $x = d$:

$$y_H = \frac{d(a-d)}{h}.$$

بما أنّ المثلث ليس متساوي الأضلاع فإنّ $G \neq H$، ومستقيم أويلر معرَّف. وهو يوازي BC إذا وفقط إذا $y_G = y_H$:

$$\frac{h}{3} = \frac{d(a-d)}{h} \iff h^2 = 3d(a-d) \iff \frac{h}{d}\cdot\frac{h}{a-d} = 3 \iff \tan B \tan C$$

لماذا استثنينا المثلث المتساوي الأضلاع؟ لأنّ فيه أيضًا $\tan B \tan C = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$، لكن $G = H$ ولا يوجد مستقيم أويلر أصلًا.

المراجع

L. Euler, “Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 11 (1767).

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967, ch. 1.

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover (originally 1929).

الأستاذ خالد خطيب · مستقيم أويلر