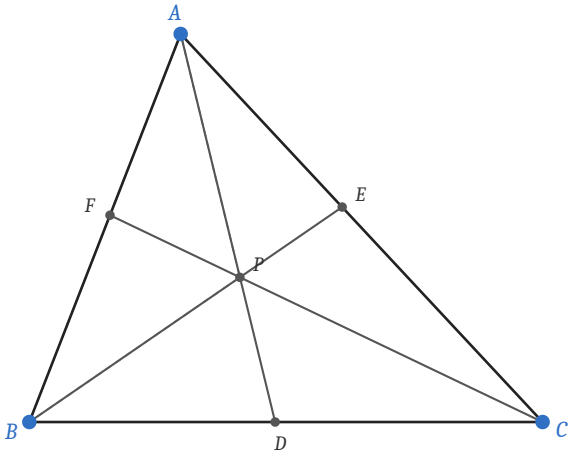
مبرهنة تشيفا – الهندسة المستوية

5 وحدات رياضيات

لتكن $D,\ E,\ F$ نقاطًا على الأضلاع $BC,\ CA,\ AB$ للمثلث ABC على الترتيب. تنصّ **مبرهنة تشيفا** على أنّ القطع $AD,\ BE,\ CF$ تلتقي في نقطة واحدة إذا وفقط إذا

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$



برهان النظرية:

في المثلث ABC (انظر الرسم) تلتقي القطع $AD,\ BE,\ CF$ في النقطة P. نرمز بـ S_{XYZ} إلى مساحة المثلث XYZ.

أ) علّل لماذا $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{BD}{DC}$، ولماذا $\frac{S_{PBD}}{S_{PDC}}=\frac{BD}{DC}$.

ب) (1) برهن: إذا كان $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}=k$ و$y\neq v$ فإنّ $\frac{x-u}{y-v}=k$.

(2) استنتج أنّ $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$.

ت) عبّر بالطريقة نفسها عن النسبتين $\frac{CE}{EA}$ و$\frac{AF}{FB}$ كنسبتين بين مساحتَي مثلثين.

ث) برهن أنّ $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$.

ج) (العكس) معطى أنّ حاصل الضرب يساوي 1. لتلتقِ BE وCF في النقطة P، وليقطع المستقيم AP الضلع BC في النقطة D'. برهن أنّ $D'=D$، واستنتج أنّ القطع الثلاث تلتقي في نقطة واحدة.

في المثلث ABC النقطة D على BC بحيث $BD:DC=3:2$، والنقطة F على AB بحيث $AF:FB=1:2$.

ح) (1) أين يجب أن تقع النقطة E على الضلع CA كي تلتقي القطع $AD,\ BE,\ CF$ في نقطة واحدة؟ احسب $CE:EA$.

(2) معطى $CA=14$. احسب طول CE.

* * *

خ) الدائرة المحصورة داخل المثلث ABC تمسّ الأضلاع $BC,\ CA,\ AB$ في النقاط $D,\ E,\ F$. برهن أنّ القطع $AD,\ BE,\ CF$ تلتقي في نقطة واحدة.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب