مقالة في الهندسة

مبرهنة الفراشة

وتران يمرّان بمنتصف وتر ثالث، و«جناحان» متساويان

نرسم في دائرة وترًا، ونحدّد منتصفه. من المنتصف نمرّر وترين آخرين كما نشاء، ونصل أطرافهما «بالتقاطع» فيظهر شكل يشبه فراشة. جناحا الفراشة يقطعان الوتر الأوّل في نقطتين — وهاتان النقطتان على بعد واحد من المنتصف دائمًا، مهما أدرنا الوترين.

الأستاذ خالد خطيب

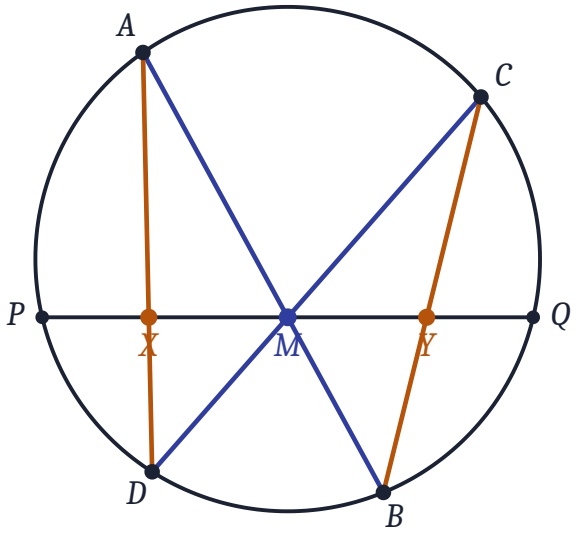
في الدائرة نتعلّم مبرهنة جميلة عن الأوتار المتقاطعة: إذا تقاطع وتران في نقطة، فإنّ حاصل ضرب جزأَي الوتر الأوّل يساوي حاصل ضرب جزأَي الوتر الثاني. مبرهنة الفراشة تبدو للوهلة الأولى من عالم آخر — إنّها تتحدّث عن تناظر: عن نقطتين متساويتين البعد عن نقطة ثالثة. لكن، كما سنرى، مبرهنة الأوتار المتقاطعة هي بالضبط مفتاح برهانها.

المبرهنة

مبرهنة الفراشة

لتكن M منتصف الوتر PQ في دائرة. نمرّر من M وترين آخرين AB وCD، بحيث تقع A وC على جهة واحدة من PQ. ليقطع الوتر AD الوترَ PQ في X، وليقطع الوتر BC الوترَ PQ في Y. عندئذٍ

$$\boxed{MX = MY}$$



بالأزرق — الوتران AB وCD المارّان بالمنتصف M؛ **بالبرتقالي** — «جناحا الفراشة» AD وBC، يقطعان الوتر PQ في X وفي Y.

ملاحظة: الشرط الوحيد المهمّ هو أنّ M **منتصف** الوتر PQ. الوتران المارّان بها يمكن أن يكونا أيّ وترين. وإذا لم تكن M في المنتصف، فإنّ X وY لا تبقيان على بعد واحد منها — جرّبوا ذلك في المختبر.

لمحة تاريخية

ظهرت المبرهنة كمسألة في مطلع القرن التاسع عشر في مجلّة إنجليزية شعبيّة للألغاز والمسائل الرياضية، اسمها The Gentleman's Diary، ونُشر فيها عام 1815 حلّ للرياضيّ الإنجليزيّ ويليام جورج هورنر — الذي يعرفه الطلّاب اليوم من «طريقة هورنر» لقسمة كثيرات الحدود.

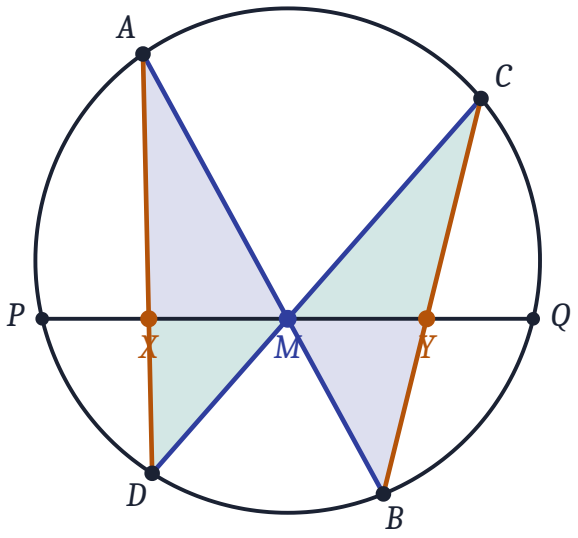
اسم «الفراشة» جاء لاحقًا، من شكل الرسم نفسه: الوتران المتقاطعان في M مع الجناحين AD وBC يرسمان فراشة جناحاها مفرودان. ومنذ ذلك الحين جُمعت للمبرهنة براهين كثيرة جدًا — هندسيّة، ومثلثاتيّة، وبالإحداثيّات، وبالهندسة الإسقاطية — حتّى صارت مثالًا كلاسيكيًّا على مسألة سهلة الصياغة وعنيدة البرهان: معظم البراهين «الواضحة» لا تنجح، وكلّ برهان ناجح يحتاج إلى فكرة.

برهان بالمساحات

نرمز: $MP = MQ = a$، $MX = x$، $MY = y$. نريد أن نبرهن أنّ $x = y$. نحتاج إلى أداتين:

مساحة المثلث بضلعين والزاوية بينهما: $S = \frac{1}{2}uv\sin\theta$.

مبرهنة الأوتار المتقاطعة: إذا تقاطع وتران في نقطة، فإنّ حاصلَي ضرب جزأَيهما متساويان.



أربعة مثلثات: AMX وBMY **بالأزرق الفاتح**، وDMX وCMY **بالأخضر الفاتح**. نقارن مساحاتها «بالدور».

1 زوجان من الزوايا المتقابلة بالرأس

عند M: الزاوية $\angle AMX$ والزاوية $\angle BMY$ متقابلتان بالرأس، وكذلك $\angle DMX$ و$\angle CMY$. لذا (نختصر $\frac{1}{2}$ والجيب المشترك)

$$\frac{S_{CMY}}{S_{DMX}} = \frac{MC \cdot MY}{MD \cdot MX}, \qquad \frac{S_{BMY}}{S_{AMX}} = \frac{MB \cdot MY}{MA \cdot MX}.$$

2 زوجان من الزوايا المحيطية

الزاوية $\angle MAX$ هي الزاوية $\angle BAD$، والزاوية $\angle MCY$ هي الزاوية $\angle DCB$. كلتاهما زاوية محيطية تقابل القوس BD، لذا هما متساويتان. وبالمثل $\angle MDX = \angle CDA$ و$\angle MBY = \angle ABC$ تقابلان القوس AC. إذن

$$\frac{S_{AMX}}{S_{CMY}} = \frac{AM \cdot AX}{CM \cdot CY}, \qquad \frac{S_{DMX}}{S_{BMY}} = \frac{DM \cdot DX}{BM \cdot BY}.$$

3 نضرب الأربع

حاصل ضرب النسب الأربع يساوي 1، لأنّ كلّ مساحة تظهر مرّة في البسط ومرّة في المقام:

$$\frac{S_{AMX}}{S_{CMY}} \cdot \frac{S_{CMY}}{S_{DMX}} \cdot \frac{S_{DMX}}{S_{BMY}} \cdot \frac{S_{BMY}}{S_{AMX}} = 1.$$

نعوّض التعابير التي وجدناها. القطع MA, MB, MC, MD تختصر كلّها، ويبقى

$$\frac{AX \cdot XD \cdot y^2}{CY \cdot YB \cdot x^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{y^2} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB}.$$

4 الأوتار المتقاطعة تُنهي العمل

الوتران AD وPQ يتقاطعان في X، لذا $AX \cdot XD = PX \cdot XQ = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2$. وبالمثل $CY \cdot YB = a^2 - y^2$. نعوّض:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2a^2 - x^2y^2 = y^2a^2 - x^2y^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2.$$

وبما أنّ $x, y > 0$، ينتج $x = y$. ■

لاحظوا أين استعملنا أنّ M هي المنتصف: فقط في الخطوة الأخيرة، حين كتبنا $PX = a - x$ و$XQ = a + x$ بالعدد a نفسه للجهتين.

وإذا لم تكن M في المنتصف؟

البرهان نفسه يعمل حتى الخطوة 4. إذا كان $MP = p$ و$MQ = q$ (عددان مختلفان)، ووقعت X بين M وP وY بين M وQ، فإنّ $PX \cdot XQ = (p - x)(q + x)$ و$QY \cdot YP = (q - y)(p + y)$. بعد قليل من الجبر نحصل على تعميم أنيق:

$$\frac{1}{MY} - \frac{1}{MX} = \frac{1}{MQ} - \frac{1}{MP}.$$

وعندما $p = q$ يصبح الطرف الأيسر صفرًا، أي $MX = MY$ — وهي مبرهنة الفراشة من جديد. يمكنكم التحقّق من هذه العلاقة بالأعداد في المختبر، بعد أن تنقلوا M عن المنتصف.

مثال عددي

في دائرة رُسم وتر PQ طوله 12، ومنتصفه M. الوتر AD (من فراشة كما في المبرهنة) يقطع PQ في النقطة X، بحيث $AX = 4$ و$XD = 5$. احسبوا MX، وMY، وحاصل الضرب $CY \cdot YB$.

الحلّ. $a = MP = 6$. وفق مبرهنة الأوتار المتقاطعة في X:

$$PX \cdot XQ = AX \cdot XD = 20 \quad \Longrightarrow \quad (6 - x)(6 + x) = 20 \quad \Longrightarrow \quad 36 - x^2 = 20$$

إذن $MX = 4$ (و$PX = 2$، $XQ = 10$). وفق مبرهنة الفراشة $MY = MX = 4$، ومن جديد وفق الأوتار المتقاطعة في Y:

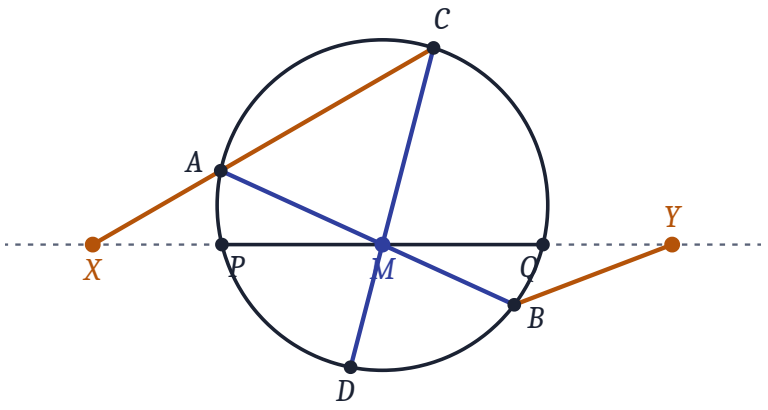
$$CY \cdot YB = PY \cdot YQ = 10 \cdot 2 = 20.$$

والنتيجة اللطيفة: $CY \cdot YB = AX \cdot XD$ — الجناحان «متوازنان» بحاصل الضرب أيضًا، لا بالبعد فقط.

تمرين للقرّاء: فراشة خارج الدائرة

تمرين

نعود إلى الرسم الأصليّ: M منتصف الوتر PQ، والوتران AB وCD يمرّان بـ M، وA, C على جهة واحدة من PQ. هذه المرّة نصل A بـ C وB بـ D. المستقيم AC يقطع امتداد الوتر PQ في X، والمستقيم BD يقطعه في Y (خارج الدائرة). برهنوا أنّ $MX = MY$ هنا أيضًا.



«الجناحان» الآن هما AC وBD، ويقطعان امتداد الوتر PQ خارج الدائرة.

تلميح

كرّروا البرهان بالمساحات مع المثلثات الأربعة $DMY,\ BMY,\ CMX,\ AMX$. وبدل مبرهنة الأوتار المتقاطعة، استعملوا مبرهنة القاطعين من نقطة خارج الدائرة: $XA \cdot XC = XP \cdot XQ$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

نرمز مرّة أخرى $MP = MQ = a$، $MX = x$، $MY = y$، والآن $x, y > a$.

زوايا متقابلة بالرأس عند M: $\angle AMX = \angle BMY$ و$\angle CMX = \angle DMY$. لذا

$$\frac{S_{DMY}}{S_{CMX}} = \frac{MD \cdot MY}{MC \cdot MX}, \qquad \frac{S_{BMY}}{S_{AMX}} = \frac{MB \cdot MY}{MA \cdot MX}.$$

زوايا محيطية: $\angle MAX = \angle BAC$ و$\angle MDY = \angle CDB$ تقابلان الوتر BC، لذا جيباهما متساويان (الزاويتان متساويتان أو متكاملتان). وبالمثل $\angle MCX = \angle DCA$

و$\angle MBY = \angle ABD$ تقابلان الوتر AD. لذا

$$\frac{S_{AMX}}{S_{DMY}} = \frac{AM \cdot AX}{DM \cdot DY}, \qquad \frac{S_{CMX}}{S_{BMY}} = \frac{CM \cdot CX}{BM \cdot BY}.$$

نضرب النسب الأربع (حاصل ضربها 1) ونختصر:

$$\frac{AX \cdot CX \cdot y^2}{DY \cdot BY \cdot x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{XA \cdot XC}{YB \cdot YD}.$$

وفق مبرهنة القاطعين: $XA \cdot XC = XP \cdot XQ = (x-a)(x+a) = x^2 - a^2$، وبالمثل $YB \cdot YD = y^2 - a^2$. إذن

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 - a^2}{y^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad -x^2a^2 = -y^2a^2 \quad \Longrightarrow \quad x = y. \qquad \blacksquare$$

البرهانان متطابقان تقريبًا حرفًا بحرف: داخل الدائرة استعملنا الأوتار المتقاطعة، وخارجها القاطعين. وفي الحالتين حاصل الضرب يساوي «قوّة النقطة» بالنسبة إلى الدائرة.

المراجع

L. Bankoff, “The Metamorphosis of the Butterfly Problem”, *Mathematics Magazine* 60 (1987), 195–210.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.

الأستاذ خالد خطيب · مبرهنة الفراشة