مقالة في الهندسة

نقطتا بروكار

ثلاث زوايا متساوية في كلّ مثلث

نبحث داخل المثلث عن نقطة تصنع القطعُ الواصلة منها إلى الرؤوس زوايا متساوية مع الأضلاع، بالترتيب الدوريّ: الزاوية عند A مع الضلع AB، وعند B مع BC، وعند C مع CA. نقطة كهذه موجودة في كلّ مثلث، وهي وحيدة — ولزاويتها صيغة أنيقة لا تتجاوز قيمتها $30°$ أبدًا.

الأستاذ خالد خطيب

في مقالة متباينة إردوش–موردل حللنا سؤالًا من أولمبياد الرياضيات الدوليّ 1991: لكلّ نقطة P داخل المثلث، واحدة على الأقلّ من الزوايا $\angle PAB,\ \angle PBC,\ \angle PCA$ لا تزيد على $30°$. من الطبيعيّ أن نسأل: هل يمكن أن تكون الزوايا الثلاث **متساوية**؟ ومتى؟ الجواب: في كلّ مثلث توجد نقطة واحدة بالضبط كهذه، وتُسمّى نقطة بروكار.

المبرهنة

نقطة بروكار وزاوية بروكار

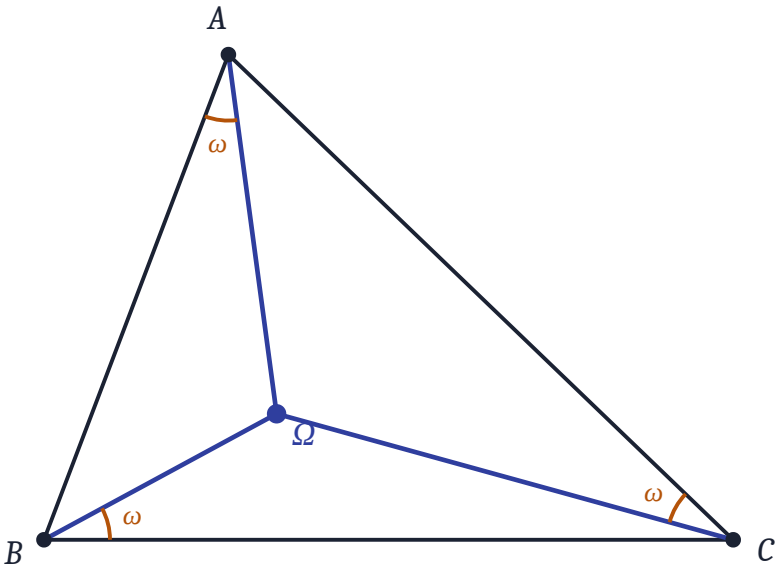
في كلّ مثلث ABC توجد نقطة وحيدة Ω داخله تحقّق

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA = \omega.$$

الزاوية المشتركة ω تُسمّى **زاوية بروكار**، وهي تحقّق

$$\boxed{\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C}$$

وفوق ذلك $\omega \le 30^\circ$ دائمًا، والمساواة فقط في المثلث المتساوي الأضلاع.



الزوايا الثلاث المعلَّمة ω متساوية. لاحظوا الترتيب الدوريّ: عند كلّ رأس نأخذ الزاوية بين **القطعة إلى Ω** والضلع المتّجه إلى الرأس التالي.

ملاحظة: الترتيب مهمّ. إذا عكسنا اتجاه الدوران — الزاوية عند A مع AC، وعند C مع CB، وعند B مع BA — نحصل على نقطة أخرى، Ω'، تُسمّى نقطة بروكار الثانية. وسنرى أنّ زاويتها هي الزاوية ω نفسها!

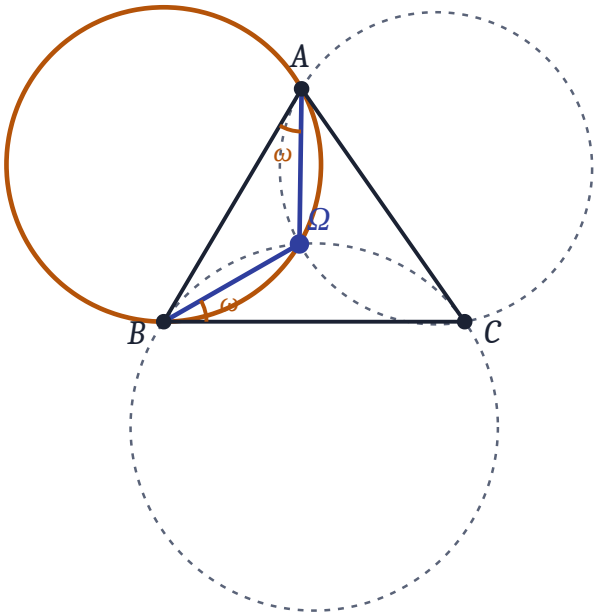
لمحة تاريخية

تحمل النقطتان اسم الضابط الفرنسيّ هنري بروكار (1845–1922)، الذي كان رياضيًّا هاويًا إلى جانب خدمته العسكرية، وعرض دراسته لهما عام 1875. لكنّه لم يكن الأوّل: الرياضيّ الألمانيّ أوغست ليوبولد كريله، مؤسّس إحدى أهمّ المجلّات الرياضية في القرن التاسع عشر، درس هاتين النقطتين قبله بنحو ستّين سنة، في عام 1816.

جاء عمل بروكار في فترة ازدهار ما يُسمّى «هندسة المثلث الحديثة» في أواخر القرن التاسع عشر، حين اكتُشفت نقاط ومستقيمات ودوائر مميّزة كثيرة في المثلث. ومن الأسماء المرتبطة باسمه: زاوية بروكار، ودائرة بروكار، ومثلث بروكار.

الإنشاء: ثلاث دوائر

كيف نجد النقطة؟ الأداة هي مبرهنة **الزاوية بين مماسّ ووتر**: الزاوية بين مماسّ لدائرة ووتر يخرج من نقطة التماسّ تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لهذا الوتر من الجهة الأخرى.



الدائرة تمرّ بـ A وB وتمسّ المستقيم BC في B. لكلّ نقطة Ω على قوسها داخل المثلث: $\angle \Omega BC = \angle \Omega AB$.
الدائرتان الرماديّتان تُنشآن بالطريقة نفسها على الضلعين الآخرين.

1 الدائرة الأولى

نرسم الدائرة التي تمرّ بـ A وB وتمسّ المستقيم BC في النقطة B. لكلّ نقطة X على هذه الدائرة داخل المثلث، الزاوية بين المماسّ BC والوتر BX تساوي الزاوية المحيطية المقابلة للوتر BX:

$$\angle XBC = \angle XAB.$$

2 الدائرة الثانية

وبالطريقة نفسها، الدائرة التي تمرّ بـ B وC وتمسّ المستقيم CA في C تحقّق لكلّ نقطة X عليها:
$\angle XCA = \angle XBC$.

3 نقطة التقاطع

الدائرتان تمرّان كلتاهما بـ B، لذا تتقاطعان في نقطة أخرى، ونسمّيها Ω. لهذه النقطة تتحقّق المساواتان معًا:

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA.$$

وهكذا أثبتنا أنّ النقطة موجودة. (والدائرة الثالثة — المارّة بـ C وA والمماسّة لـ AB في A — تمرّ بـ Ω أيضًا.) هذا هو الإنشاء المستعمل في المختبر.

صيغة الزاوية: برهان بقانون الجيوب

لتكن Ω نقطة بروكار، وω زاويتها. نحسب طول القطعة ΩB بطريقتين. نرمز إلى الأضلاع كالعادة $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$، وإلى الزوايا A, B, C.

1 في المثلث $A\Omega B$

الزاوية عند A هي ω، والزاوية عند B هي $\angle \Omega BA = B - \omega$، لذا الزاوية عند Ω هي $180^\circ - B$. وفق قانون الجيوب:

$$\frac{\Omega B}{\sin \omega} = \frac{c}{\sin(180^\circ - B)} \quad \Longrightarrow \quad \Omega B = \frac{c \sin \omega}{\sin B}.$$

2 في المثلث $B\Omega C$

هنا الزاوية عند B هي ω، والزاوية عند C هي $C - \omega$، والزاوية عند Ω هي $180^\circ - C$. لذا

$$\Omega B = \frac{a \sin(C - \omega)}{\sin C}.$$

3 نساوي ونبسّط

نساوي التعبيرين، ونعوّض $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$ (قانون الجيوب في المثلث ABC) و$\sin(C-\omega)=\sin C\cos\omega-\cos C\sin\omega$:

$$\sin\omega\,\sin^2 C=\sin A\sin B\,(\sin C\cos\omega-\cos C\sin\omega).$$

نقسم الطرفين على $\sin A\sin B\sin C\sin\omega$:

$$\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=\cot\omega-\cot C.$$

4 الخطوة الأخيرة

بما أنّ $C=180^\circ-(A+B)$، فإنّ $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$، ومن هنا $\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=\cot B+\cot A$. إذن

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C.\qquad\blacksquare$$

والوحدانيّة؟ الصيغة تحدّد ω تحديدًا تامًّا (فالدالّة $\cot$ متباينة بين 0° و90°). وعندما نعرف ω، فالنقطة Ω هي تقاطع نصف مستقيم يخرج من A بزاوية ω مع AB ونصف مستقيم يخرج من B بزاوية ω مع BC — نقطة واحدة فقط.

صيغة بالأضلاع. من قانون جيوب التمام ومن $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ نحصل على $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$، حيث S مساحة المثلث. نجمع الثلاثة:

$$\cot\omega=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

هذه الصيغة هي التي يستعملها المختبر.

لماذا لا تتجاوز 30°؟

نرمز $x = \cot A,\ y = \cot B,\ z = \cot C$. في كلّ مثلث تتحقّق المتطابقة

$$xy + yz + zx = 1.$$

(برهانها: $\cot C = -\cot(A+B) = \frac{1 - \cot A \cot B}{\cot A + \cot B}$، ونضرب في المقام.) والآن

$$(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \tfrac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0,$$

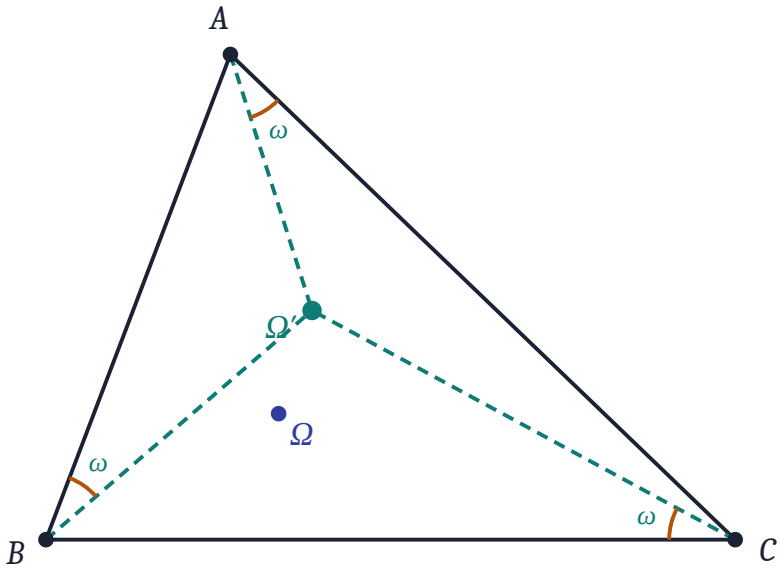
لذا $(x+y+z)^2 \geq 3$. وبما أنّ ω أصغر من كلّ زوايا المثلث فهي حادّة، و$\cot\omega = x+y+z > 0$، إذن

$$\cot\omega \geq \sqrt{3} = \cot 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad \omega \leq 30^\circ.$$

المساواة فقط إذا $x = y = z$، أي $A = B = C$: المثلث المتساوي الأضلاع، وفيه Ω هي المركز. وهذا يتّفق تمامًا مع سؤال الأولمبياد: في نقطة بروكار الزوايا الثلاث متساوية، لذا كلّ واحدة منها لا تزيد على 30°.

النقطة الثانية

إذا دُرنا في الاتجاه المعاكس، نبحث عن نقطة Ω' تحقّق $\angle\Omega'AC = \angle\Omega'CB = \angle\Omega'BA = \omega'$. بالبرهان نفسه بالضبط (مع تبديل الأدوار) نحصل على $\cot\omega' = \cot A + \cot B + \cot C$. الطرف الأيمن متماثل، لذا $\omega = \omega'$: **النقطتان لهما الزاوية نفسها.**

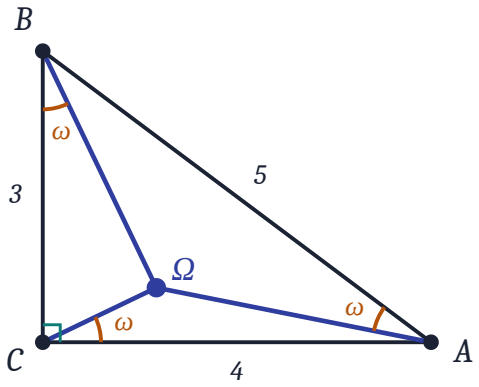


نقطة بروكار الثانية Ω': الزوايا في الاتجاه المعاكس. النقطة الزرقاء الصغيرة هي Ω.

هل يمكن أن تنطبق النقطتان؟ إذا $\Omega = \Omega'$ فعند الرأس A تكون الزاويتان $\angle\Omega AB$ و$\angle\Omega AC$ كلتاهما ω، أي $A = 2\omega$، وكذلك $B = C = 2\omega$ — مثلث متساوي الأضلاع. في كلّ مثلث آخر هما نقطتان مختلفتان، وبينهما علاقات جميلة: مثلًا، بعداهما عن مركز الدائرة الخارجية متساويان.

مثال عددي: المثلث 3–4–5

في المثلث القائم الزاوية ABC: $a = BC = 3$، $b = CA = 4$، $c = AB = 5$، والزاوية القائمة عند C. نحسب زاوية بروكار وأبعاد Ω عن الرؤوس.



نقطة بروكار في المثلث 3–4–5. الزاوية القائمة عند C.

الزاوية. $\cot A = \frac{4}{3}$، $\cot B = \frac{3}{4}$، $\cot C = 0$. لذا

$$\cot\omega = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} \quad\Longrightarrow\quad \omega = \operatorname{arctan}\frac{12}{25} \approx 25.64^\circ.$$

وبالصيغة الثانية: $S = 6$، و$\frac{9+16+25}{24} = \frac{25}{12}$. ✓ $\cot\omega$.

الأبعاد. من الخطوة الأولى في البرهان: $\Omega B = \frac{c\sin\omega}{\sin B}$، وبالطريقة نفسها $\Omega C = \frac{a\sin\omega}{\sin C}$ و$\Omega A = \frac{b\sin\omega}{\sin A}$.

هنا $\sin\omega = \frac{12}{\sqrt{769}} \approx 0.4327$، $\sin A = \frac{3}{5}$، $\sin B = \frac{4}{5}$، $\sin C = 1$:

القطعة	الحساب	الطول
ΩA	$4 \cdot 0.4327 \div 0.6$	≈ 2.88
ΩB	$5 \cdot 0.4327 \div 0.8$	≈ 2.70
ΩC	$3 \cdot 0.4327 \div 1$	≈ 1.30

جرّبوا ذلك في المختبر بالزرّ «المثلث 3–4–5».

تمرين للقرّاء: متطابقة الجيوب

تمرين

لتكن ω زاوية بروكار للمثلث ABC. برهنوا أنّ

$$\sin^3\omega = \sin(A-\omega)\,\sin(B-\omega)\,\sin(C-\omega).$$

تلميح

القطع $A\Omega,\ B\Omega,\ C\Omega$ تلتقي في نقطة واحدة — فكّروا بمبرهنة تشيفا. ليقطع المستقيم $A\Omega$ الضلع BC في D. عبّروا عن $\frac{BD}{DC}$ كنسبة بين مساحتَي المثلثين ABD وADC، واستعملوا صيغة المساحة $\frac12 xy\sin\theta$.

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

ليقطع $A\Omega,\ B\Omega,\ C\Omega$ الأضلاع $BC,\ CA,\ AB$ في $D,\ E,\ F$. للمثلثين ABD وADC الارتفاع نفسه من A، لذا

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac12\,c\cdot AD\sin\angle BAD}{\frac12\,b\cdot AD\sin\angle DAC}=\frac{c\sin\omega}{b\sin(A-\omega)}.$$

وبالطريقة نفسها

$$\frac{CE}{EA}=\frac{a\sin\omega}{c\sin(B-\omega)},\qquad \frac{AF}{FB}=\frac{b\sin\omega}{a\sin(C-\omega)}.$$

القطع تلتقي في Ω، لذا وفق مبرهنة تشيفا حاصل ضرب النسب الثلاث يساوي 1. الأضلاع a,b,c تختصر، ويبقى

$$\frac{\sin^3\omega}{\sin(A-\omega)\sin(B-\omega)\sin(C-\omega)}=1. \qquad \blacksquare$$

(هذه الطريقة — مبرهنة تشيفا بلغة الجيوب — تُسمّى «الصيغة المثلثاتية لمبرهنة تشيفا»، وهي أداة مفيدة جدًّا في مسائل الزوايا.)

المراجع

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960 (orig. *Modern Geometry*, 1929).

R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA, 1995.

الأستاذ خالد خطيب · نقطتا بروكار