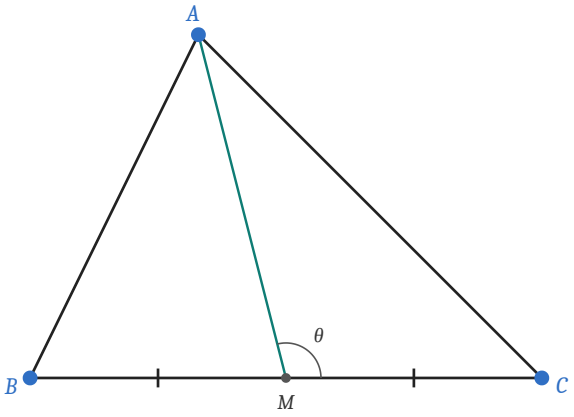
# مبرهنة أبولونيوس (طول المتوسط) – الهندسة المستوية

**5 وحدات رياضيات**

في كلّ مثلث $ABC$، إذا كانت $M$ منتصف الضلع $BC$، فإنّ

$$AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + BM^2\right).$$

هذه العلاقة تعطي طول المتوسط بدلالة أطوال الأضلاع، وهي صحيحة في كلّ مثلث — بلا زاوية قائمة.




**برهان النظرية:**

في المثلث $ABC$ (انظر الرسم): $M$ منتصف $BC$، ونرمز $BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ AM = m$. $\theta = \angle AMC$ و$BM = MC = \frac{a}{2}$. إذن

**أ)** عبّر عن $AC^2$ بدلالة $m,\ \frac{a}{2}$ و$\cos\theta$ (اعتمادًا على المثلث $AMC$).

**ب)** (1) عبّر عن $\angle AMB$ بدلالة $\theta$.

(2) عبّر عن $AB^2$ بدلالة $m,\ \frac{a}{2}$ و$\cos\theta$.

**ت)** برهن أنّ $AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + BM^2\right)$.

**ث)** استنتج أنّ $m^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

**ج)** معطى أنّ $\angle BAC = 90^\circ$. استعن بالبند ث وبمبرهنة فيثاغورس، وبيّن أنّ $AM = \frac{1}{2}BC$.

في المثلث $ABC$: $AB = 9$، $AC = 7$، $BC = 8$، و$M$ منتصف $BC$.

**ح)** (1) احسب طول المتوسط $AM$.

(2) احسب $\cos\angle AMC$.

(3) طولا ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع هما $5$ و$7$، وطول أحد قطريه $8$. احسب طول القطر الآخر. (تلميح: قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر.)

* * *

**خ)** نرمز بـ $m_a,\ m_b,\ m_c$ إلى أطوال المتوسطات الثلاثة في المثلث $ABC$. برهن أنّ $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

**للاطّلاع:** مبرهنة أبولونيوس حالة خاصّة من **مبرهنة ستيوارت** ($b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$ لقطعة $AD$ تقسم $BC$ إلى $m$ و$n$)، عندما تكون $D$ منتصف $BC$. انظر المقالتين في mathbagrut.com.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب