مقالة في الهندسة

مبرهنة أبولونيوس

كم يبلغ طول المتوسط؟

مبرهنة فيثاغورس تربط بين أضلاع المثلث القائم الزاوية فقط. لكن في كلّ مثلث — قائمًا كان أم لا — توجد علاقة أخرى بين المربّعات، تشمل الأضلاع الثلاثة والمتوسط النازل إلى أحدها. هذه هي مبرهنة أبولونيوس، وهي تعطي طول المتوسط مباشرةً من أطوال الأضلاع.

الأستاذ خالد خطيب

إذا عرفنا أطوال أضلاع المثلث الثلاثة، فالمثلث محدّد تمامًا — لذا يجب أن يكون طول كلّ متوسط محدّدًا أيضًا. لكن كيف نحسبه؟ لا نعرف زوايا المثلث، والمتوسط لا يصنع بالضرورة زاوية قائمة مع الضلع. مبرهنة أبولونيوس تجيب عن هذا السؤال بصيغة قصيرة، وفيها مفاجأة صغيرة: هي في الحقيقة «فيثاغورس لكلّ المثلثات»، وإذا كان المثلث قائمًا تعطينا حقيقة نعرفها من الصفّ العاشر.

المبرهنة

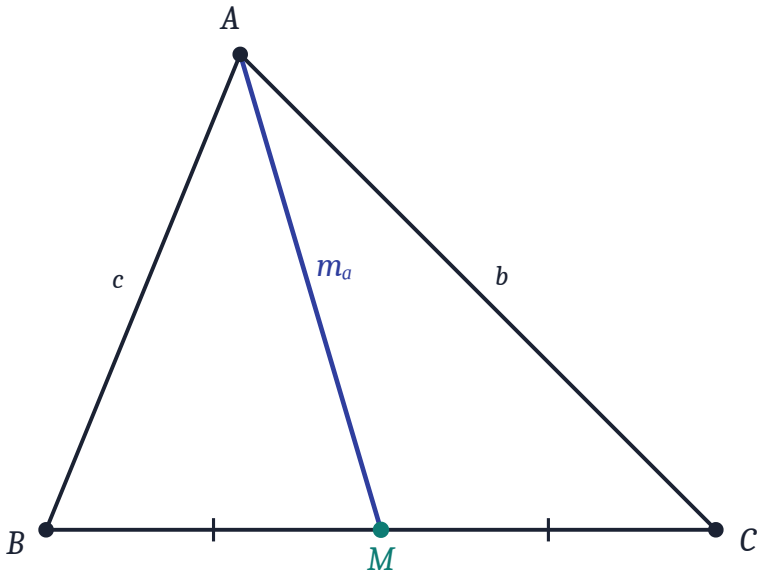
مبرهنة أبولونيوس

لتكن M منتصف الضلع BC في المثلث ABC. عندئذٍ

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2\,AM^2 + 2\,BM^2}$$

وبرموز الأضلاع $a = BC,\ b = CA,\ c = AB$، وبالرمز $m_a = AM$ لطول المتوسط:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$



المتوسط AM يصل الرأس A بمنتصف الضلع BC. العلامتان على BC تعنيان $BM = MC = \frac{a}{2}$.

الصيغة الثانية تنتج من الأولى مباشرةً: نعوّض $BM = \frac{a}{2}$، فنحصل على $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$، ومن هنا $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

ملاحظة: المبرهنة صحيحة لكلّ مثلث، ولكلّ واحد من المتوسطات الثلاثة. مثلًا للمتوسط النازل من B: $m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$.

حالة خاصّة من مبرهنة أعمّ. مبرهنة أبولونيوس هي حالة خاصّة من مبرهنة ستيوارت، التي تعطي طول أيّ قطعة AD من الرأس A إلى نقطة D على الضلع BC: إذا كان $BD = m,\ DC = n,\ AD = d$ فإنّ

$$b^2 m + c^2 n = a\,(d^2 + mn).$$

عندما تكون D منتصف BC نعوّض $m = n = \frac{a}{2}$ و$d = m_a$، ونقسم على $\frac{a}{2}$:
$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = 2\,AM^2 + 2\,BM^2$ — وهذه بالضبط مبرهنة أبولونيوس.

لمحة تاريخية

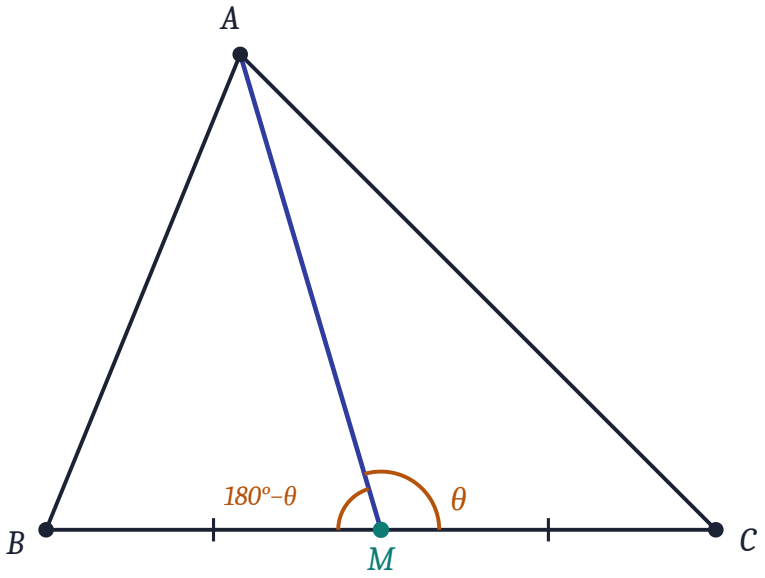
أبولونيوس البرغاويّ (من مدينة برغة في آسيا الصغرى) عاش في أواخر القرن الثالث قبل الميلاد وبداية القرن الثاني، ودرس في الإسكندرية. اشتهر بكتابه الكبير «المخروطات» في ثمانية أجزاء، وهو الذي أعطى القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ أسماءها. جرت العادة أن تُنسب مبرهنة المتوسط إليه، وهي من نوع النتائج التي استعملها الهندسيّون اليونانيون في دراسة المحلّات الهندسية.

للعالم العربيّ دور خاصّ في قصّة أبولونيوس: الأجزاء الأربعة الأولى من «المخروطات» وصلتنا باليونانية، أمّا الأجزاء الخامس والسادس والسابع فلم تصلنا إلا في ترجمتها العربية التي أُنجزت في بغداد في القرن التاسع، برعاية الإخوة بني موسى بن شاكر. ولولا هذه الترجمة لضاعت هذه الأجزاء إلى الأبد.

والأداة التي سنستعملها في البرهان أقدم من أبولونيوس: في الكتاب الثاني من «الأصول» لإقليدس (القضيّتان 12 و13) تعميمٌ لمبرهنة فيثاغورس على المثلثات المنفرجة والحادّة — وهو ما نسمّيه اليوم قانون جيوب التمام، مكتوبًا بلغة المساحات.

برهان بقانون جيوب التمام

الفكرة: المتوسط يقسم المثلث إلى مثلثين، والزاويتان عند M متكاملتان. نكتب قانون جيوب التمام في المثلثين، ونجمع — فيختفي جيب التمام.



الزاويتان عند M **متكاملتان**: $\angle AMC = \theta$ و$\angle AMB = 180^\circ - \theta$.

1 المثلث AMC

نرمز $m = AM$ و$x = BM = MC$. وفق قانون جيوب التمام في المثلث AMC:

$$AC^2 = m^2 + x^2 - 2mx\cos\theta.$$

2 المثلث AMB

في المثلث AMB الزاوية عند M هي $180^\circ - \theta$، و$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$. لذا

$$AB^2 = m^2 + x^2 + 2mx\cos\theta.$$

3 نجمع

الحدّان اللذان فيهما $\cos\theta$ متعاكسان، فيختصران:

$$AB^2 + AC^2 = 2m^2 + 2x^2 = 2AM^2 + 2BM^2. \qquad \blacksquare$$

برهان ثانٍ: بالإحداثيّات

من يحبّ الهندسة التحليلية سيجد هنا برهانًا من سطرين. نضع M في نقطة الأصل والضلع BC على محور x: $B(-x_0,0)$، $C(x_0,0)$، وليكن $A(p,q)$ رأسًا ما. عندئذٍ

$$AB^2+AC^2=\big[(p+x_0)^2+q^2\big]+\big[(p-x_0)^2+q^2\big]=2(p^2+q^2)+2x_0^2.$$

لكنّ $p^2+q^2=AM^2$ و$x_0^2=BM^2$. انتهى. لاحظوا كيف يختصر الحدّان $\pm 2px_0$ — هذا هو «اختفاء جيب التمام» نفسه، بلغة أخرى.

ثلاث حالات خاصة ونتيجتان

1 المثلث القائم: المتوسط إلى الوتر

إذا كانت $\angle A=90^\circ$ فوفق فيثاغورس $AB^2+AC^2=BC^2=4BM^2$. نعوّض في المبرهنة: $4BM^2=2AM^2+2BM^2$، أي $AM=BM$. المتوسط إلى الوتر يساوي نصف الوتر — وهذا ما رأيتموه في المختبر.

2 المثلث المتساوي الساقين

إذا كان $AB=AC$ فالمتوسط AM هو الارتفاع أيضًا، والمبرهنة تصير $2AB^2=2AM^2+2BM^2$ — أي مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم ABM. إذن مبرهنة أبولونيوس تعميم لمبرهنة فيثاغورس.

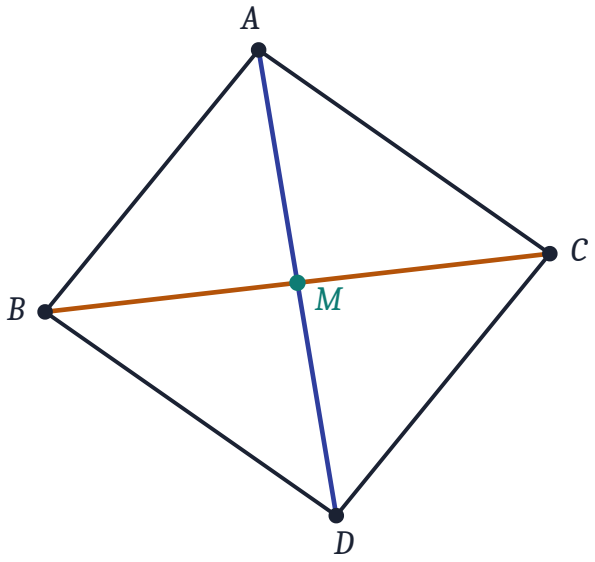
3 علاقة بمبرهنة ستيوارت

مبرهنة ستيوارت تعطي طول أيّ قطعة من الرأس إلى الضلع المقابل. المتوسط هو الحالة الخاصّة التي تقسم فيها النقطة الضلع إلى نصفين متساويين، وعندها تختزل مبرهنة ستيوارت بالضبط إلى مبرهنة أبولونيوس.

نتيجة: قانون متوازي الأضلاع. نكمل المثلث ABC إلى متوازي الأضلاع $ABDC$. قطراه AD وBC ينصّف كلّ منهما الآخر في M، لذا $AD=2AM$ و$BC=2BM$. نضرب المبرهنة في 2:

$$AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2 = 2(AB^2 + AC^2) = 4AM^2 + 4BM^2 = AD^2 + BC^2.$$

أي: **في كلّ متوازي أضلاع، مجموع مربّعات الأضلاع الأربعة يساوي مجموع مربّعَي القطرين.** وفي المستطيل يتساوى القطران، فنعود إلى فيثاغورس مرّة أخرى.



متوازي الأضلاع $ABDC$: **القطر** AD و**القطر** BC يتقاطعان في منتصفيهما M.

نتيجة صغيرة. نكتب المبرهنة للمتوسطات الثلاثة ونجمع: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2)$.
أي أنّ مجموع مربّعات المتوسطات يساوي دائمًا ثلاثة أرباع مجموع مربّعات الأضلاع.

مثال عددي

أضلاع المثلث ABC: $a = BC = 14$، $b = CA = 15$، $c = AB = 13$. نحسب أطوال المتوسطات الثلاثة.

$$m_a^2 = \frac{2\cdot 15^2 + 2\cdot 13^2 - 14^2}{4} = \frac{450 + 338 - 196}{4} = 148 \quad\Longrightarrow\quad m_a = \sqrt{148} = 2\sqrt{}$$

$$m_b^2 = \frac{2\cdot 14^2 + 2\cdot 13^2 - 15^2}{4} = \frac{505}{4} \quad\Longrightarrow\quad m_b = \frac{\sqrt{505}}{2} \approx 11.24$$

$$m_c^2 = \frac{2\cdot 14^2 + 2\cdot 15^2 - 13^2}{4} = \frac{673}{4} \quad\Longrightarrow\quad m_c = \frac{\sqrt{673}}{2} \approx 12.97$$

الضلع	طوله	المتوسط النازل إليه
a	14	≈ 12.17
b	15	≈ 11.24
c	13	≈ 12.97

لاحظوا: المتوسط الأقصر ينزل إلى الضلع الأطول، والأطول إلى الضلع الأقصر. وللتحقّق:

$$\tfrac{3}{4}(196+225+169) = 442.5 = 148 + \tfrac{505}{4} + \tfrac{673}{4}.$$ ✓

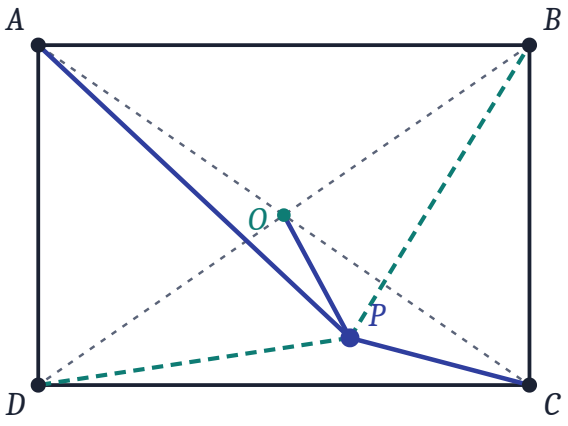
تمرين للقرّاء: مبرهنة العلم البريطانيّ

تمرين

$ABCD$ مستطيل، وP نقطة ما في المستوى (داخل المستطيل أو خارجه). برهنوا أنّ

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

ثمّ احسبوا: إذا كان $PA = 3,\ PB = 4,\ PC = 5$، فكم يساوي PD؟



مجموع مربّعَي **القطعتين الزرقاوين** يساوي مجموع مربّعَي **القطعتين الخضراوين**. (يُسمّى الادّعاء «مبرهنة العلم البريطانيّ» بسبب شكل الرسم.)

تلميح

لتكن O نقطة تقاطع قطرَي المستطيل. ما هي القطعة PO في المثلث PAC؟ وفي المثلث PBD؟ وماذا نعرف عن قطرَي المستطيل؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

قطرا المستطيل متساويان وينصّف كلّ منهما الآخر، لذا $OA = OB = OC = OD$. القطعة PO متوسط في المثلث PAC (لأنّ O منتصف AC)، ووفق مبرهنة أبولونيوس

$$PA^2 + PC^2 = 2PO^2 + 2OA^2.$$

وهي متوسط في المثلث PBD أيضًا، لذا

$$PB^2 + PD^2 = 2PO^2 + 2OB^2.$$

بما أنّ $OA = OB$، فالطرفان الأيمنان متساويان، ومن هنا $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. ■

(إذا وقعت P على أحد القطرين فالمثلث «مسطّح»، لكنّ البرهان بالإحداثيّات يبيّن أنّ المبرهنة صحيحة في هذه الحالة أيضًا.)

وللحساب: $PD^2 = PA^2 + PC^2 - PB^2 = 9 + 25 - 16 = 18$، أي
$PD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$. لاحظوا أنّنا لم نحتج إلى معرفة أبعاد المستطيل!

المراجع

T. L. Heath (trans.), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1908 — Book II, Props. 12–13.

T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, Oxford, 1921 (Apollonius of Perga).

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
