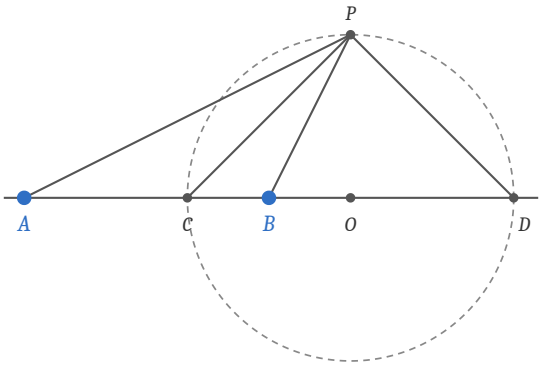
دائرة أبولونيوس – الهندسة المستوية

5 وحدات رياضيات

لتكن A وB نقطتين ثابتتين، وk عددًا موجبًا لا يساوي 1. كلّ النقاط P التي تحقّق $\dfrac{PA}{PB} = k$ تقع على دائرة واحدة، تُسمّى **دائرة أبولونيوس**. في هذه الورقة نبرهن ذلك بالهندسة التحليلية، ثمّ نكتشف السبب الهندسيّ.

برهان النظرية:



في هيئة محاور معطاة النقطتان $A(0,0)$ و$B(6,0)$. النقطة $P(x,y)$ تحقّق $PA = 2PB$.

أ) برهن أنّ إحداثيّات النقطة P تحقّق المعادلة $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$. استنتج أنّ P تقع على دائرة، وجد مركزها O ونصف قطرها.

ب) الدائرة تقطع محور x في النقطتين C وD (C بين A وB). جد إحداثيّات C وD، وبيّن أنّ $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} = 2$.

ت) بيّن أنّ النقطة $P(8,4)$ تقع على الدائرة، وبرهن أنّ PC ينصّف الزاوية $\angle APB$. استعن بعكس مبرهنة منصّف الزاوية في المثلث.

ث) بيّن أنّ $\angle CPD = 90^\circ$. علّل.

نعمّم: لتكن $A(0,0)$ و$B(d,0)$ حيث $d > 0$، وليكن $k > 0$ عددًا معطًى.

ج) (1) برهن أنّه إذا كان $k \neq 1$ فإنّ النقاط P التي تحقّق $PA = k \cdot PB$ تقع على دائرة مركزها $\left(\dfrac{k^2 d}{k^2-1}, 0\right)$ ونصف قطرها $\dfrac{kd}{|k^2-1|}$.

(2) على أيّ شكل تقع هذه النقاط إذا كان $k = 1$؟

* * *

ح) بلا إحداثيّات: لتكن P نقطة لا تقع على المستقيم AB وتحقّق $PA = 2PB$. برهن أنّ منصّف الزاوية $\angle APB$ يمرّ بالنقطة C، وأنّ منصّف الزاوية الخارجية عند P يمرّ بالنقطة D، واستنتج أنّ $\angle CPD = 90^\circ$ لكلّ نقطة كهذه.

مع احترامي،
معلّمكم خالد خطيب