مقالة في الهندسة

دائرة أبولونيوس

حين تكون النسبة بين بعدين ثابتة

نثبّت نقطتين A وB، ونبحث عن كلّ النقاط P التي يكون بعدها عن A ضعفَ بعدها عن B. أين تقع هذه النقاط؟ الجواب غير متوقَّع: إنّها ترسم دائرة كاملة. وهذا صحيح لكلّ نسبة ثابتة — باستثناء النسبة 1 وحدها.

الأستاذ خالد خطيب

نعرف جيّدًا ماذا يحدث عندما يكون البعدان **متساويين**: النقاط المتساوية البعد عن A وعن B تقع على المنصّف العموديّ للقطعة AB — مستقيم. ماذا لو طلبنا أن يكون أحد البعدين ضعف الآخر، أو ثلاثة أمثاله؟ من الطبيعيّ أن نتوقّع منحنيًا معقّدًا. لكنّ أبولونيوس اكتشف قبل أكثر من ألفين ومئتي سنة أنّ الجواب بسيط على نحو مدهش: دائرة، يمكن إيجاد مركزها ونصف قطرها بالمسطرة والفرجار.

المبرهنة

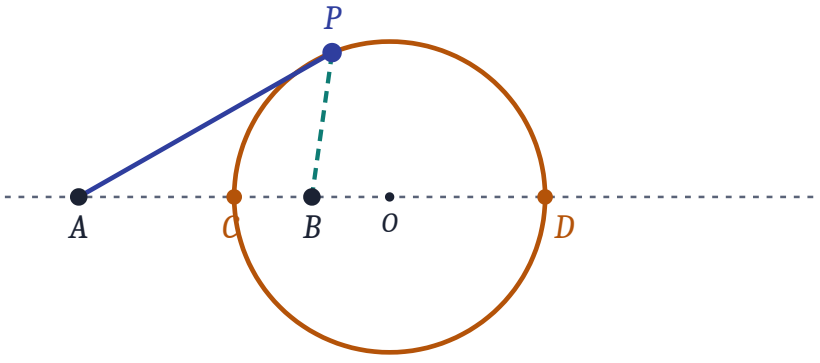
دائرة أبولونيوس

لتكن A وB نقطتين مختلفتين، وk عددًا موجبًا لا يساوي 1. مجموعة كلّ النقاط P في المستوى التي تحقّق

$$\boxed{\frac{PA}{PB} = k}$$

هي دائرة. قطرها هو القطعة CD، حيث C النقطة على القطعة AB التي تحقّق $\frac{CA}{CB} = k$، وD النقطة على امتداد AB التي تحقّق $\frac{DA}{DB} = k$. ونصف قطرها

$$r = \frac{k \cdot AB}{|k^2 - 1|}.$$



النسبة $k = 2$: لكلّ نقطة P على **الدائرة**، PA ضعف PB. **النقطتان** C **و** D تقسمان AB بالنسبة نفسها من الداخل ومن الخارج، وهما طرفا قطر.

ملاحظة: إذا كانت $k > 1$ فالنقطة P أقرب إلى B، والدائرة تحيط بـ B. وإذا كانت $k < 1$ فالدائرة تحيط بـ A. وعندما تقترب k من 1 تكبر الدائرة أكثر فأكثر، وفي النهاية «تنفتح» إلى المنصّف العموديّ — وهو الحالة $k = 1$ التي استثنيناها.

لمحة تاريخية

أبولونيوس البرغاويّ (أواخر القرن الثالث قبل الميلاد) معروف أساسًا بكتابه «المخروطات». لكنّه كتب أيضًا كتبًا أصغر ضاعت أصولها، منها كتاب «المحلّات المستوية» — أي مجموعات النقاط التي تقع على مستقيم أو على دائرة. من هذا الكتاب جاءت المبرهنة التي نتناولها هنا.

كيف نعرف ذلك إذا كان الكتاب قد ضاع؟ بفضل بابوس الإسكندرانيّ، الذي عاش في القرن الرابع الميلاديّ وكتب «المجموعة الرياضية»، في جزئها السابع لخّص كتب أبولونيوس الضائعة وذكر الادّعاءات الواردة فيها. وفي القرن السابع عشر حاول بيير دي فيرما — المشهور بنظرية الأعداد — أن يعيد بناء كتاب «المحلّات المستوية» كاملًا اعتمادًا على هذا التلخيص.

انتبهوا إلى الاسم: «مسألة أبولونيوس» شيء آخر — إيجاد دائرة تمسّ ثلاث دوائر معطاة — من كتاب ضائع آخر له.

برهان أوّل: بالإحداثيّات

هذا البرهان يعطي الاتجاهين معًا: كلّ نقطة تحقّق الشرط تقع على الدائرة، وكلّ نقطة على الدائرة تحقّق الشرط. نرمز $AB = d$، ونضع $A(0,0)$ و$B(d,0)$، ولتكن $P(x,y)$.

1 نتخلّص من الجذور

الأبعاد موجبة، لذا الشرط $PA = k \cdot PB$ يكافئ $PA^2 = k^2\,PB^2$:

$$x^2 + y^2 = k^2\big[(x-d)^2 + y^2\big].$$

2 نرتّب

نفكّ الأقواس وننقل كلّ شيء إلى طرف واحد، ثم نقسم على $k^2-1\neq 0$ (هنا نحتاج إلى $k\neq 1$!):

$$x^2+y^2-\frac{2k^2d}{k^2-1}\,x+\frac{k^2d^2}{k^2-1}=0.$$

3 نكمل إلى مربّع

نرمز $x_0=\frac{k^2d}{k^2-1}$. بإكمال المربّع:

$$(x-x_0)^2+y^2=x_0^2-\frac{k^2d^2}{k^2-1}=\frac{k^4d^2-k^2d^2(k^2-1)}{(k^2-1)^2}=\frac{k^2d^2}{(k^2-1)^2}.$$

هذه معادلة دائرة مركزها $O(x_0,0)$ على المستقيم AB، ونصف قطرها $r=\frac{kd}{|k^2-1|}$. وبما أنّ كلّ خطوة كانت تكافؤًا، فالدائرة هي بالضبط مجموعة النقاط المطلوبة. ■

4 أين C وD؟

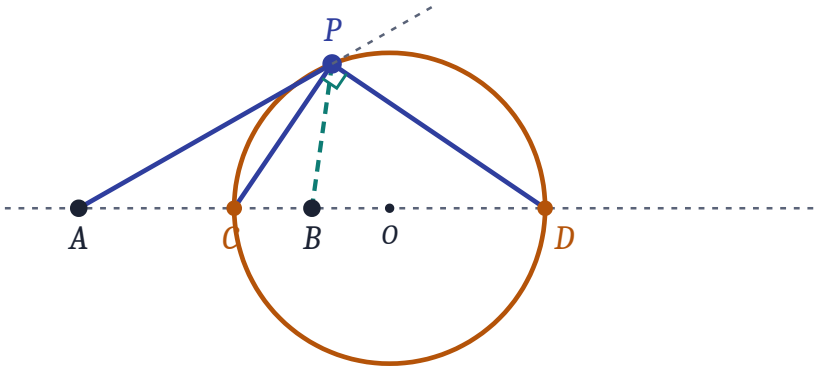
تقطع الدائرة محور x في النقطتين $x_0\pm r$. نحسب (لـ $k>1$):

$$x_0-r=\frac{k^2d-kd}{k^2-1}=\frac{kd}{k+1},\qquad x_0+r=\frac{k^2d+kd}{k^2-1}=\frac{kd}{k-1}.$$

النقطة الأولى تقسم AB من الداخل بنسبة k (بعدها عن A هو $\frac{k}{k+1}d$ وعن B هو $\frac{1}{k+1}d$)، والثانية تقسمها من الخارج بالنسبة نفسها. هاتان هما C وD.

برهان ثانٍ: منصّفا الزاوية

هذا البرهان يفسّر «لماذا» تظهر دائرة. لتكن P نقطة تحقّق $\frac{PA}{PB}=k$ ولا تقع على المستقيم AB.



PC ينصّف الزاوية $\angle APB$، وPD ينصّف الزاوية الخارجية عند P. منصّفا زاويتين متجاورتين متكاملتين متعامدان.

1 منصّف داخليّ

في المثلث APB: $\frac{CA}{CB} = k = \frac{PA}{PB}$. وفق عكس مبرهنة منصّف الزاوية، القطعة PC تنصّف الزاوية $\angle APB$.

2 منصّف خارجيّ

وبالطريقة نفسها $\frac{DA}{DB} = k = \frac{PA}{PB}$، ووفق عكس مبرهنة المنصّف الخارجيّ، PD ينصّف الزاوية الخارجية عند P.

3 زاوية قائمة

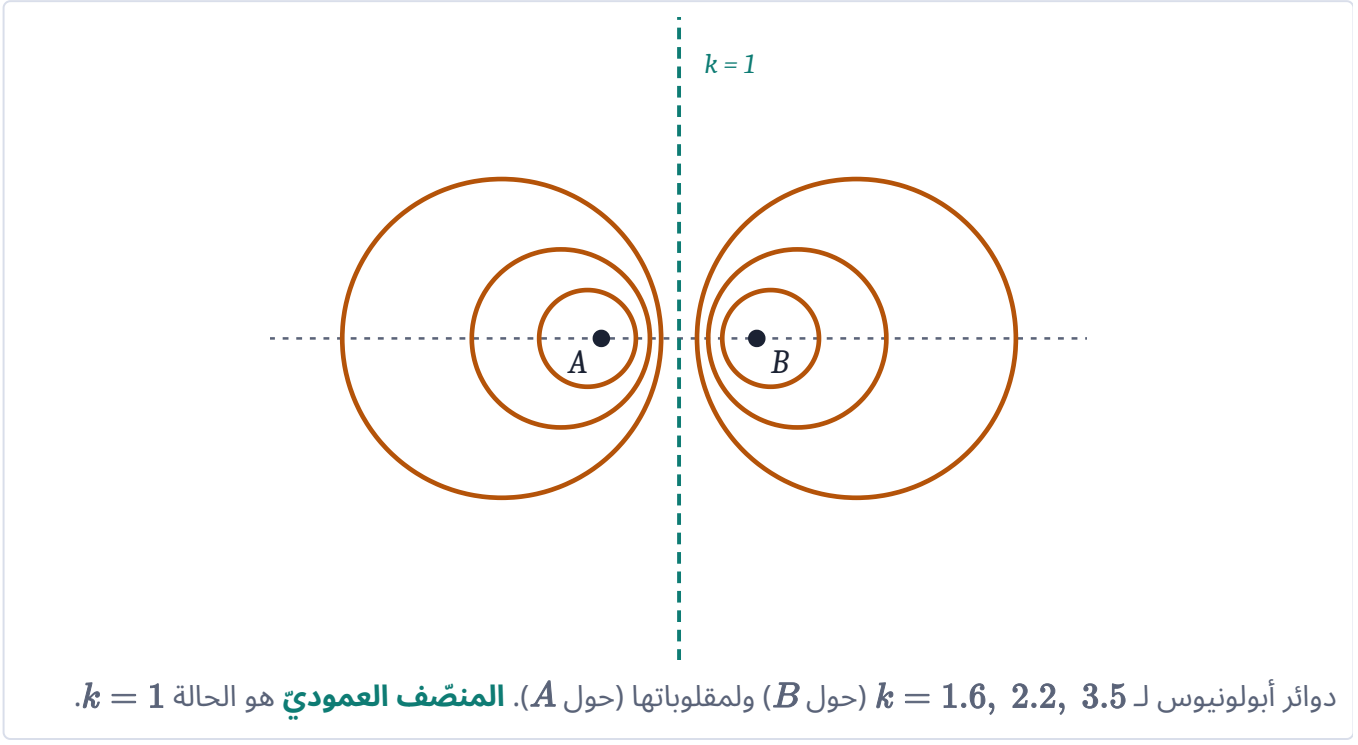
الزاوية $\angle APB$ والزاوية الخارجية المجاورة لها مجموعهما $180°$، لذا مجموع نصفيهما $90°$:

$\angle CPD = 90°$. والنقطة التي ترى القطعة CD بزاوية قائمة تقع على الدائرة التي قطرها CD (عكس مبرهنة طاليس). ■

وهذا ما رأيتموه في المختبر: مهما حرّكتم P، الزاوية $\angle CPD$ تبقى $90°$.

عائلة من الدوائر

لكلّ قيمة k دائرة خاصّة بها. الدوائر التي فيها $k > 1$ تحيط بـ B، وتصغر كلّما كبرت k وتقترب من B. والدوائر التي فيها $k < 1$ صور مرآتيّة لها بالنسبة إلى المنصّف العموديّ (لأنّ تبديل A وB يحوّل k إلى $\frac{1}{k}$). ولا تتقاطع دائرتان من العائلة أبدًا — فكلّ نقطة في المستوى لها نسبة واحدة فقط.



دوائر أبولونيوس لـ $k = 1.6,\ 2.2,\ 3.5$ (حول B) ولمقلوباتها (حول A). **المنصّف العموديّ** هو الحالة $k = 1$.

نتيجة صغيرة. من الحسابات أعلاه: $OA = x_0 = \frac{k^2 d}{k^2-1}$ و$OB = x_0 - d = \frac{d}{k^2-1}$، لذا

$$OA \cdot OB = \frac{k^2 d^2}{(k^2-1)^2} = r^2.$$

حاصل ضرب بعدَي A وB عن المركز يساوي مربّع نصف القطر، في كلّ دوائر العائلة. (يقال إنّ A وB «نقطتان متعاكستان» بالنسبة إلى الدائرة.) في المثال العدديّ أدناه: $8 \cdot 2 = 16 = 4^2$.

مثال عددي

$A(0,0)$ و$B(6,0)$. أوجدوا مجموعة النقاط P التي تحقّق $PA = 2\,PB$.

الحلّ. هنا $d = 6$ و$k = 2$. وفق الصيغ:

$$x_0 = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8, \qquad r = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4.$$

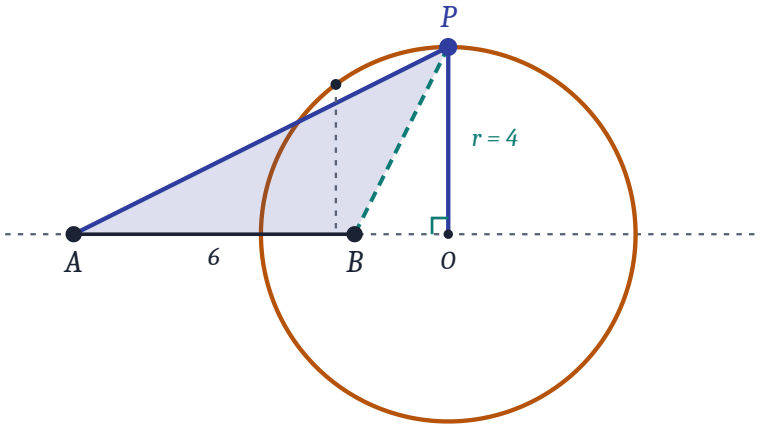
إذن الدائرة $(x-8)^2 + y^2 = 16$. وطرفا القطر: $C(4,0)$ — وبالفعل $CA = 4 = 2 \cdot CB$ — و$D(12,0)$ — وبالفعل $DA = 12 = 2 \cdot DB$. وللتحقّق من نقطة ليست على المحور: $P(8,4)$ تحقّق $PA = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ و$PB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$، والنسبة 2 بالضبط. ✓

وماذا عن $PA = \frac{1}{2} PB$؟ نبدّل دورَي A وB، فنحصل على الصورة المرآتيّة بالنسبة إلى المستقيم $x = 3$: الدائرة $(x+2)^2 + y^2 = 16$.

تمرين للقرّاء: أكبر مساحة

تمرين

في المثلث PAB معطى $AB = 6$ و$PA = 2\,PB$. ما أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث؟ وما طولا الضلعين PA وPB عندها؟



كلّ النقاط P الممكنة تقع على دائرة أبولونيوس. ارتفاع المثلث هو بعد P عن المستقيم AB.

تلميح

القاعدة AB ثابتة، لذا المساحة تكبر بقدر ما يكبر الارتفاع. على أيّ منحنى تقع P؟ وما أكبر بعد ممكن لنقطة على هذا المنحنى عن المستقيم AB؟

حلّ كامل (حاولوا وحدكم أولًا!)

وفق المثال العدديّ، النقطة P تقع على دائرة مركزها O على المستقيم AB، ونصف قطرها $r = 4$. بعد أيّ نقطة على الدائرة عن المستقيم AB (الذي يمرّ بالمركز) لا يتجاوز نصف القطر، ويساويه فقط في «قمّة» الدائرة أو «قاعها»، حيث $PO \perp AB$. لذا

$$S_{PAB} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot h \le \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12.$$

أكبر مساحة هي 12، وتتحقّق عندما $P = (8, \pm 4)$ في الإحداثيّات السابقة. عندها $PA = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \approx 8.94$ و$PB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$. ■

للتحقّق بطريقة مستقلّة، صيغة هيرون مع الأضلاع $6,\ 4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}$ تعطي المساحة 12 فعلًا. لكن جرّبوا أن تحلّوا المسألة بصيغة هيرون من البداية — كدالّة في PB — وستقدّرون كم يوفّر علينا التفكير الهندسيّ!

المراجع

T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, Oxford, 1921 (Apollonius, *Plane Loci*).

A. Jones (ed. & trans.), *Pappus of Alexandria: Book 7 of the Collection*, Springer, 1986.

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
